「テンソル繰り込み群を用いたゼロ温度高密度領域におけるNJLモデルのカイラル相転移の解析」

筑波大学・計算科学研究センター
藏増 嘉伸

@宇宙史研究センター構成員会議, 2020年11月30日

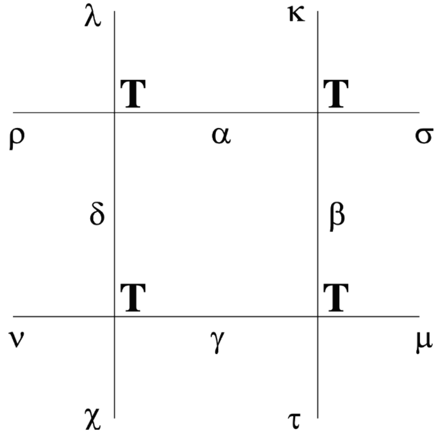
内容

- テンソル繰り込み群(TRG)
  - 2次元Isingモデル
- 特異値分解(SVD)
- モンテカルロ法との比較
- TRG法の素粒子物理への応用
- 低温・高密度下におけるNJLモデルの相転移
- まとめ

テンソル繰り込み群(TRG)

Levin-Nave
PRL99(2007)120601

例としてNサイトを持つ2Dイジングモデルを考える



ハミルトニアン $H = \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j \qquad s_i \pm 1$

分配関数 $Z = \sum_{\{s_i\}} \exp\left(-\beta H\right)$

$$= \boxed{\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots=1}^{2} T_{\alpha,\lambda,\rho,\delta} T_{\sigma,\kappa,\alpha,\beta} T_{\mu,\beta,\gamma,\tau} T_{\gamma,\delta,\nu,\chi} \cdots}$$

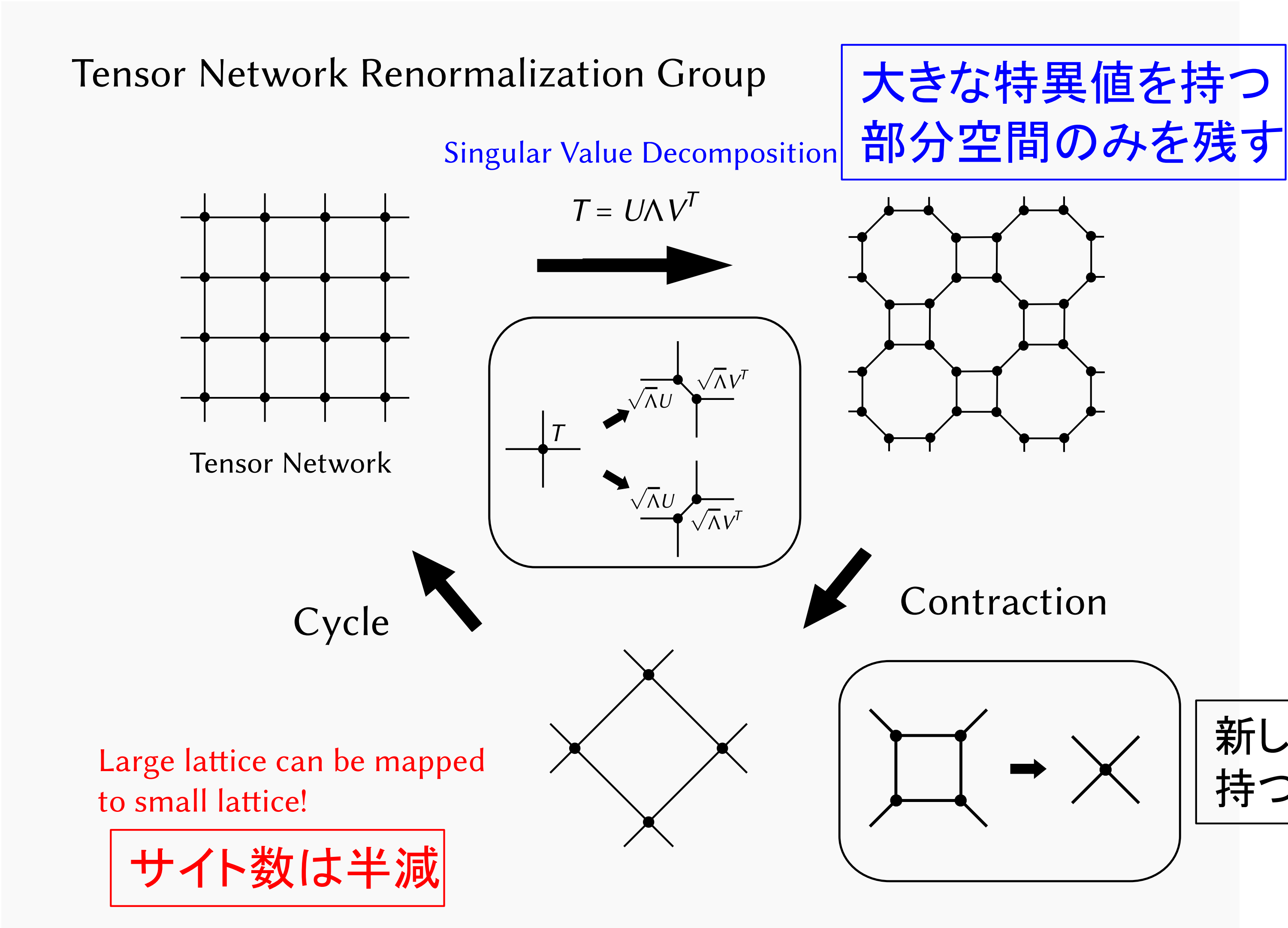
テンソルネットワーク表現

モデルの詳細は初期テンソルのみに依存
計算アルゴリズムはモデルと独立

勿論，サイト数Nが大きくなれば添字の縮約の完全実行は不可能
⇒ どうやって分配関数を評価するか？

TRGアルゴリズムの概略

1. サイト上のテンソルTに対する特異値分解
2. 古い添字の縮約 (疎視化)
3. 手続きの反復



新しい添字を持つテンソル

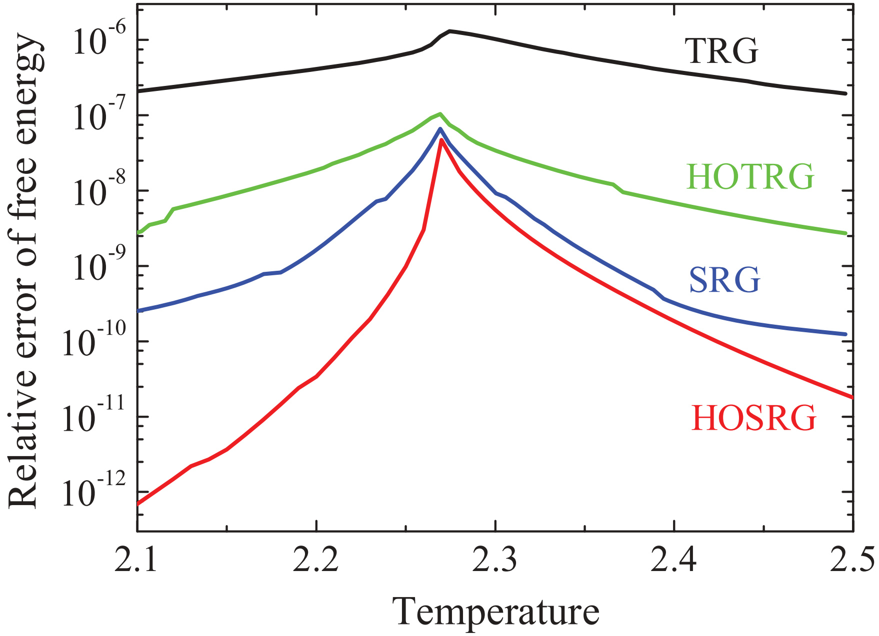
2Dイジングモデルを使ったテスト

アルゴリズムの要諦は特異値分解を用いた低ランク近似

$$T_{i,j,k,l} \simeq \sum_{m=1}^{\mathrm{D_{cut}}} U_{\{k,l\},m} \Lambda_m V_{\{i,j\},m}$$

誤差をコントロールするパラメーターはD_{cut}

転移点近傍での自由エネルギーの厳密解からの相対誤差,
格子サイズ=$2^{30\sim50}$, D_{cut}=24



Xie et al.
PRB86(2012)045139

Onsagerの厳密解との比較
相対誤差：$\leq 10^{-6}$

特異値分解(Singular Value Decomposition)

任意のm×n実行列Aは　$A=U\Sigma V^T$ と分解できる

U: m×mの直交行列

V: n×nの直交行列

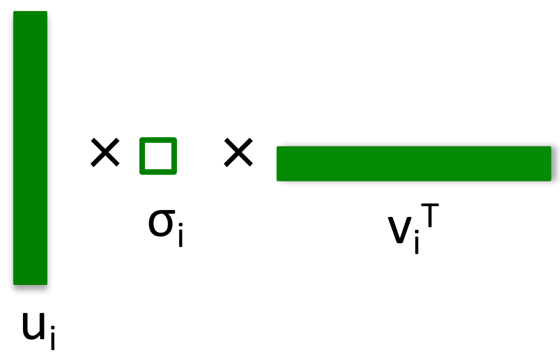
$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \cdots, \sigma_n)$　$(\sigma_1\geq\sigma_2\geq \sigma_3\geq\sigma_4\geq\cdots\geq\sigma_n\geq 0)$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \cdots, \sigma_n$はAの特異値で非負

Uの各列$u_1, u_2, \cdots, u_n$とVの各列$v_1, v_2, \cdots, v_n$を用いたランク1の行列和に分解,

$$A=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\cdots+\sigma_n u_n v_n^T$$

$\sigma_i u_i v_i^T=$



行列の近似

行列Aの近似

$$A=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\cdots+\sigma_k u_k v_k^T+\cdots+\sigma_n u_n v_n^T$$

$$A_k=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\cdots+\sigma_k u_k v_k^T$$ （行列k個の和で近似）

近似誤差は$\|A-A_k\|_F$で定義

$$\|A-A_k\|_F=(\sigma_{k+1}^2+\sigma_{k+2}^2+\cdots+\sigma_n^2)^{1/2}$$

ただし, $\|A\|_F=(\mathrm{Tr}(A^TA))^{1/2}=(\Sigma_i \Sigma_j a_{ij}^2)^{1/2}$

画像圧縮などに利用

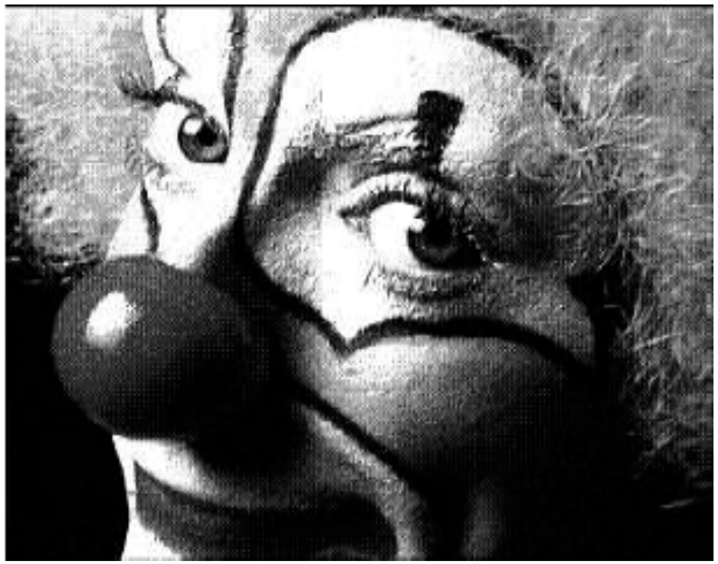
特異値分解(SVD)を用いた画像圧縮

200x320ピクセルの画像データ ⇒ 200x320実行列A

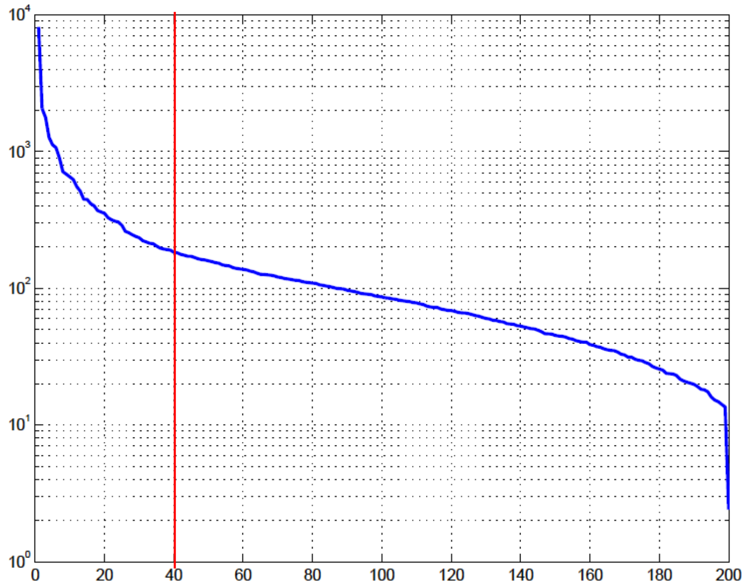
行列を特異値分解

$$A=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\ldots+\sigma_n u_n v_n^T \quad (n=200)$$

サンプル画像(200x320ピクセル)



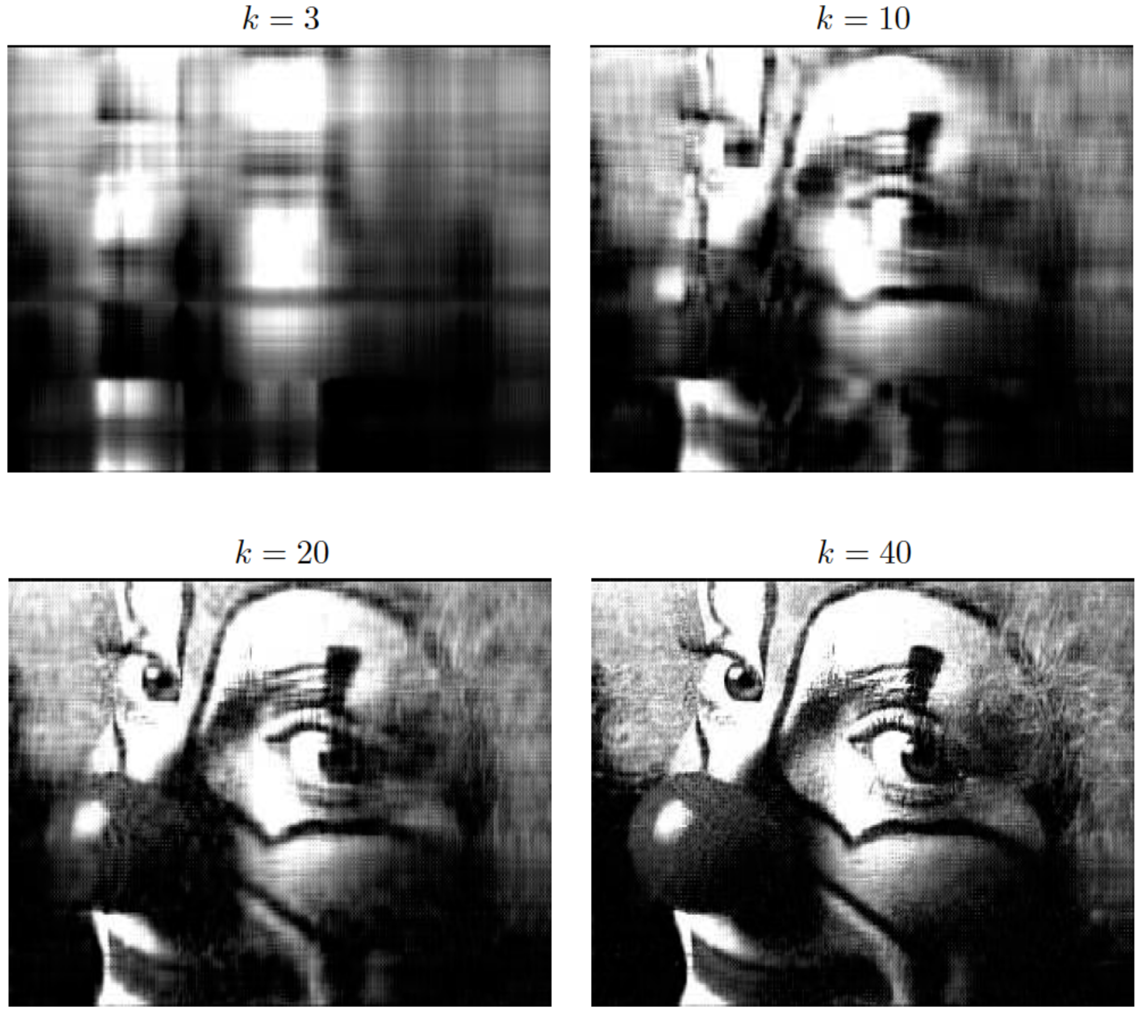
特異値の分布(大→小)



J. Demmel: Applied Numerical Linear Algebra, SIAM 1997

復元画像の品質

$$A_k=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\ldots+\sigma_k u_k v_k^T \quad (k \ll 200)$$



J. Demmel: Applied Numerical Linear Algebra, SIAM 1997

モンテカルロ法との相違点

モンテカルロ法 確率的手法	→	テンソル繰り込み群 決定論的手法

コペルニクス的転換

- モンテカルロ法における符号問題および複素作用問題がない

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \ \exp(-S_{\rm Re}[\phi] + iS_{\rm Im}[\phi])$$

- L^Dのシステムサイズに対する計算コスト$\propto D \times \log(L)$
- グラスマン数を直接扱うことが可能
- 分配関数Zそのものを計算可能

↓

素粒子物理：軽いクォークのダイナミクス，有限密度QCDの相構造解析
Strong CP問題などの研究に応用可能
物質科学：強相関量子系，金属絶縁体転移，高温超伝導などの
研究に応用可能 (ハバードモデル)

TRG法の素粒子物理への応用(1)

2次元モデル

CP(1)モデル : Kawauchi-Takeda, PRD93(2016)114503

実ϕ^4理論 :

Shimizu, Mod.Phys.Lett.A27(2012)1250035,

Kadoh-YK-Nakamura-Sakai-Takeda-Yoshimura, JHEP1905(2019)184

有限密度における複素ϕ^4理論 :

Kadoh-YK-Nakamura-Sakai-Takeda-Yoshimura, , JHEP2002(2020)161

θ項(トポロジカル項)を持つU(1)ゲージ理論 :

YK-Yoshimura, JHEP2004(2020)089

Schwingerモデル(2次元QED), θ項(トポロジカル項)を持つSchwingerモデル :

Shimizu-YK, PRD90(2014)014508, PRD90(2014)074503,
PRD97(2018)034502

有限密度におけるGross-Neveuモデル :

Takeda-Yoshimura, PTEP2015(2015)043B01

N=1 Wess-Zuminoモデル(超対称性理論) :

Kadoh-YK-Nakamura-Sakai-Takeda-Yoshimura, JHEP1803(2018)141

符号問題解決の検証，スカラー場・フェルミオン場・ゲージ場の計算手法開発

TRG法の素粒子物理への応用(2)

<u>3次元モデル</u>

自由Wilsonフェルミオン:

Sakai-Takeda-Yoshimura, PTEP2017(2017)063B07,

Yoshimura-YK-Nakamura-Takeda-Sakai, PRD97(2018)054511

有限温度におけるZ_2ゲージ理論:

YK-Yoshimura, JHEP1908(2019)023

<u>4次元モデル</u>

Isingモデル:

Akiyama-YK-Yamashita-Yoshimura, PRD100(2019)054510

有限密度における複素ϕ^4理論:

Akiyama-Kadoh-YK-Yamashita-Yoshimura, JHEP2002(2020)161

有限密度におけるNambu–Jona-Lasinio(NJL)モデル:

Akiyama-YK-Yamashita-Yoshimura, arXiv:2009.11583

⇒ 研究の重心は2次元モデル・理論から4次元モデル・理論へ移行中

低温・高密度下におけるNJLモデルの相転移(1)

Akiyama+, arXiv:2009.11583

連続時空におけるNJLモデル

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\gamma_\nu\partial_\nu\psi(x) - g_0\left\{(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma_5\psi(x))^2\right\}$$

格子上における有限密度NJLモデル(Kogut-Susskindフェルミオン)

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}a^3\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\nu=1}^{4}\eta_\nu(n)\left[\mathrm{e}^{\mu a\delta_{\nu,4}}\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\nu}) - \mathrm{e}^{-\mu a\delta_{\nu,4}}\bar{\chi}(n+\hat{\nu})\chi(n)\right] \\ &+ ma^4\sum_{n\in\Lambda}\bar{\chi}(n)\chi(n) - g_0a^4\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\nu=1}^{4}\bar{\chi}(n)\chi(n)\bar{\chi}(n+\hat{\nu})\chi(n+\hat{\nu}) \end{aligned}$$

μ : 化学ポテンシャル(密度をコントロール)

m : フェルミオンの質量

g_0 : 4フェルミ相互作用の結合定数

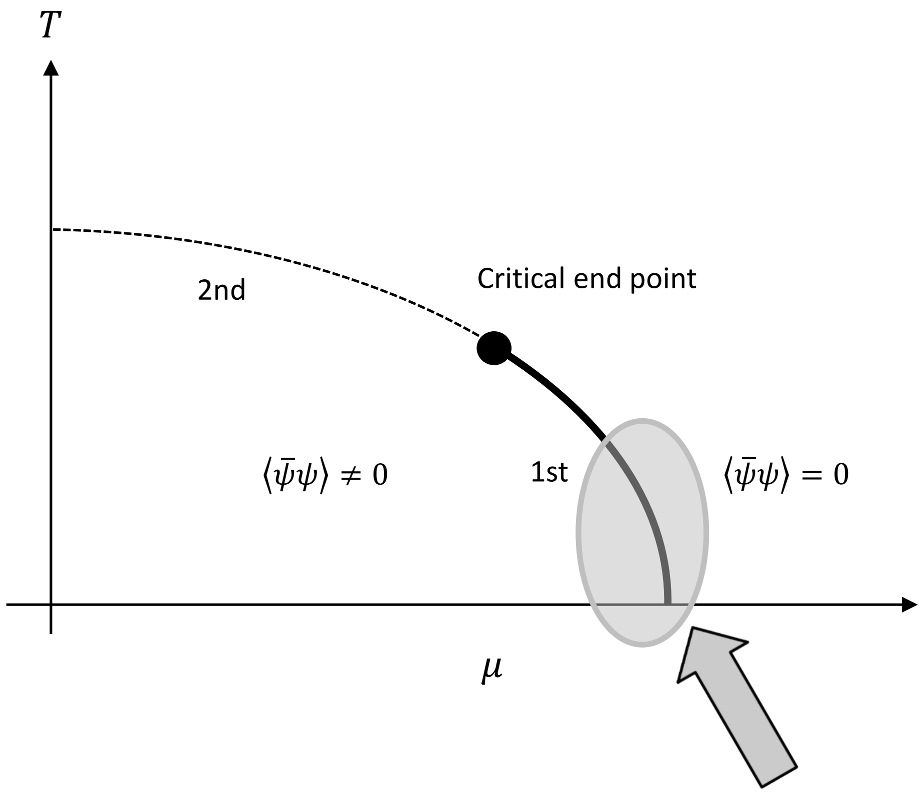
a : 格子間隔

低温・高密度下におけるNJLモデルの相転移(2)

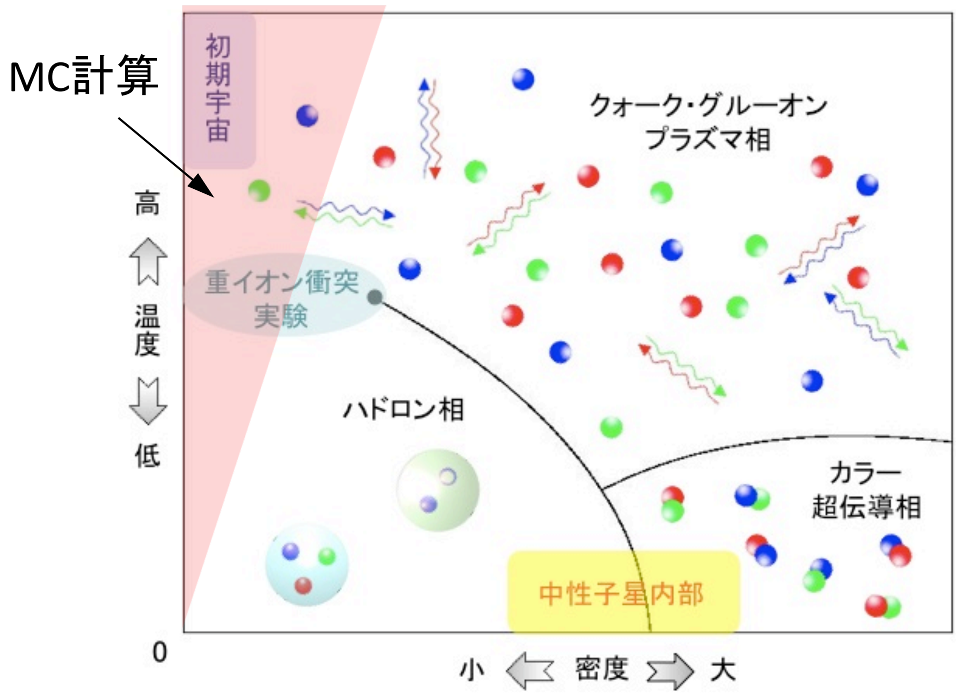
Akiyama+, arXiv:2009.11583

NJLモデルはQCDのプロトタイプ

NJLで期待されている相図



QCDで期待されている相図



低温・高密度での一次相転移を検証することが重要

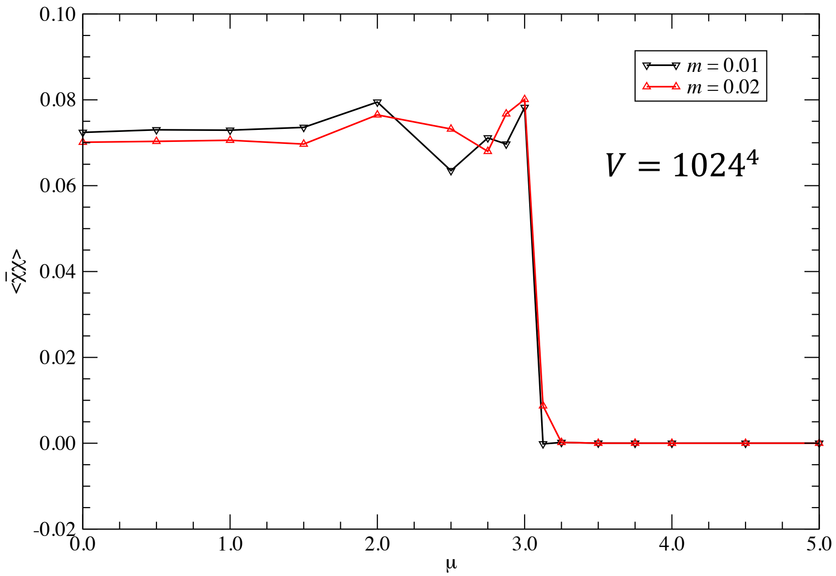
低温・高密度下におけるNJLモデルの相転移(3)

Akiyama+, arXiv:2009.11583

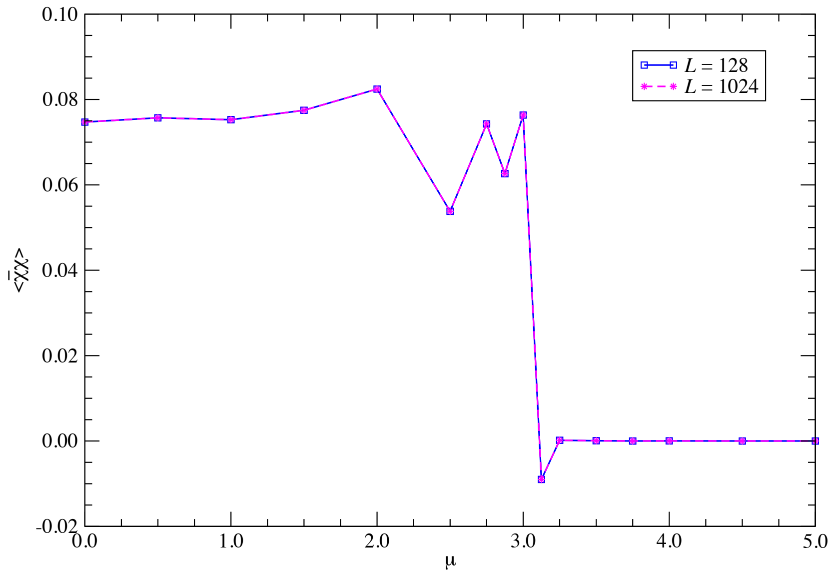
カイラル相転移のオーダーパラメータ

$$\langle \bar{\chi}(n)\chi(n)\rangle = \lim_{m\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial m}\ln Z$$

質量依存性@L=1024



体積依存性@m=0



$\mu \approx 3.0$付近での不連続性(トビ) ⇒ 一次相転移

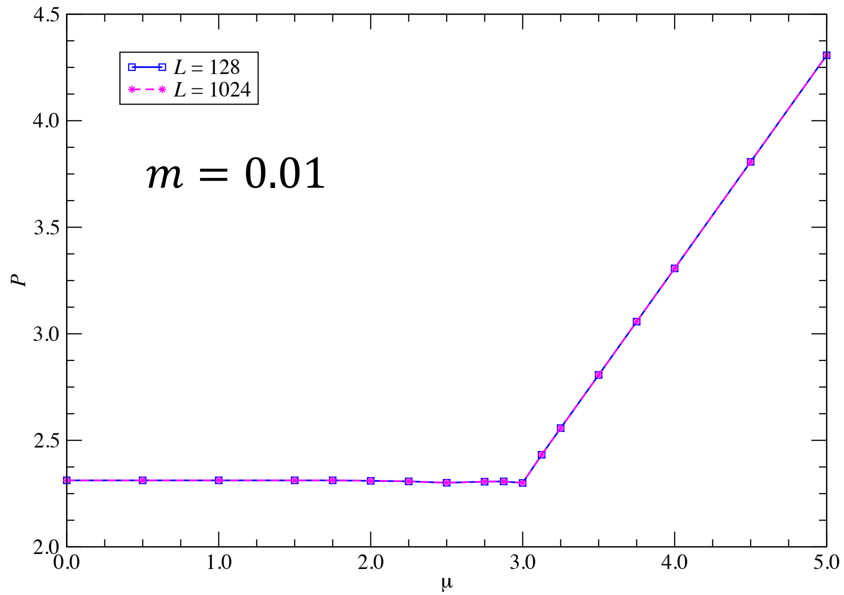
低温・高密度下におけるNJLモデルの相転移(4)

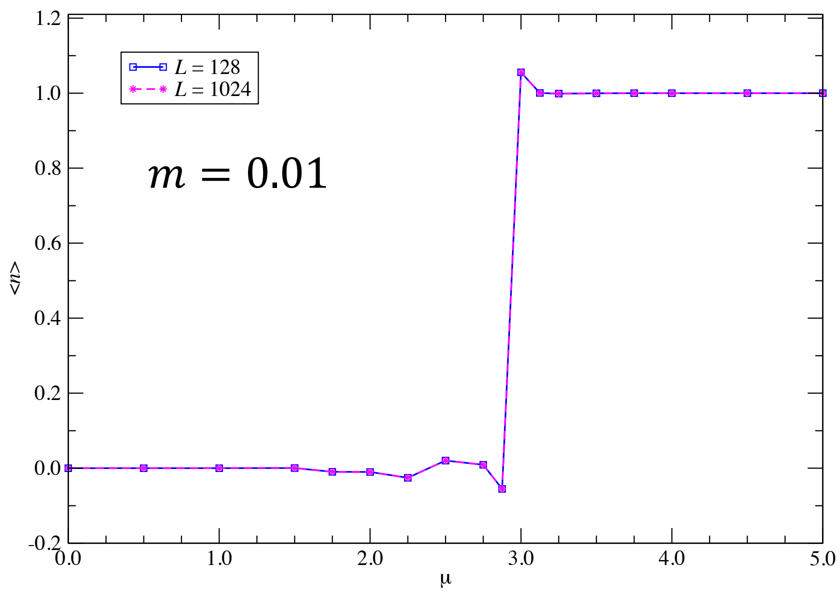
Akiyama+, arXiv:2009.11583

状態方程式：圧力と粒子数密度

$$\boxed{P = \frac{\ln Z}{V}}$$

$$\boxed{\langle n(\mu)\rangle = \frac{\partial P(\mu)}{\partial \mu} \approx \frac{P(\mu+\Delta\mu)-P(\mu)}{\Delta\mu}}$$





$\mu \approx 3.0$付近での不連続性(トビ) ⇒ 一次相転移

TRG法では状態方程式も容易に得られる

まとめ

- モンテカルロ法における符号問題および複素作用問題がない

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \ \exp(-S_{\mathrm{Re}}[\phi] + iS_{\mathrm{Im}}[\phi])$$

- L^Dのシステムサイズに対する計算コスト∝D × log(L)
- グラスマン数を直接扱うことが可能
- 分配関数Zそのものを計算可能

⇓

素粒子物理：軽いクォークのダイナミクス，有限密度QCDの相構造解析
Strong CP問題などの研究に応用可能
物質科学：強相関量子系，金属絶縁体転移，高温超伝導などの
研究に応用可能 (ハバードモデル)

現段階：
4次元モデル・理論の計算が可能になった
有限密度NJLモデルの解析に成功
⇒ 有限密度QCD・ハバードモデルの相構造解析