「テンソル繰り込み群による(3+1)次元有限密度 Z_2ゲージヒッグスモデルの研究」

筑波大学・計算科学研究センター
藏増 嘉伸

@宇宙史研究センター構成員会議, 2022年6月24日

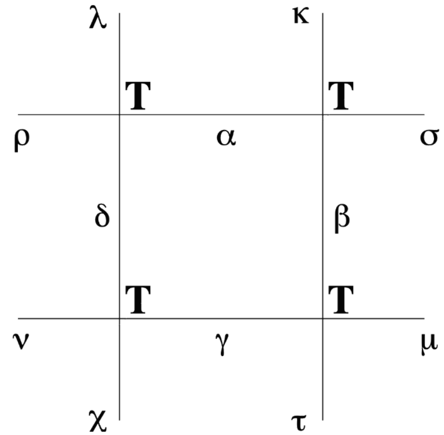
内容

- テンソル繰り込み群(TRG)
  - 2次元Isingモデル
- 特異値分解(SVD)
- モンテカルロ法との比較
- TRG法の素粒子物理への応用
- (3+1)次元Z_2ゲージヒッグスモデルの臨界終点
- まとめ

テンソル繰り込み群(TRG)

Levin-Nave
PRL99(2007)120601

例としてNサイトを持つ2Dイジングモデルを考える



ハミルトニアン$H = \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j \qquad s_i \pm 1$

分配関数 $Z = \sum_{\{s_i\}} \exp\left(-\beta H\right)$

$$= \boxed{\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots=1}^{2} T_{\alpha,\lambda,\rho,\delta} T_{\sigma,\kappa,\alpha,\beta} T_{\mu,\beta,\gamma,\tau} T_{\gamma,\delta,\nu,\chi} \cdots}$$

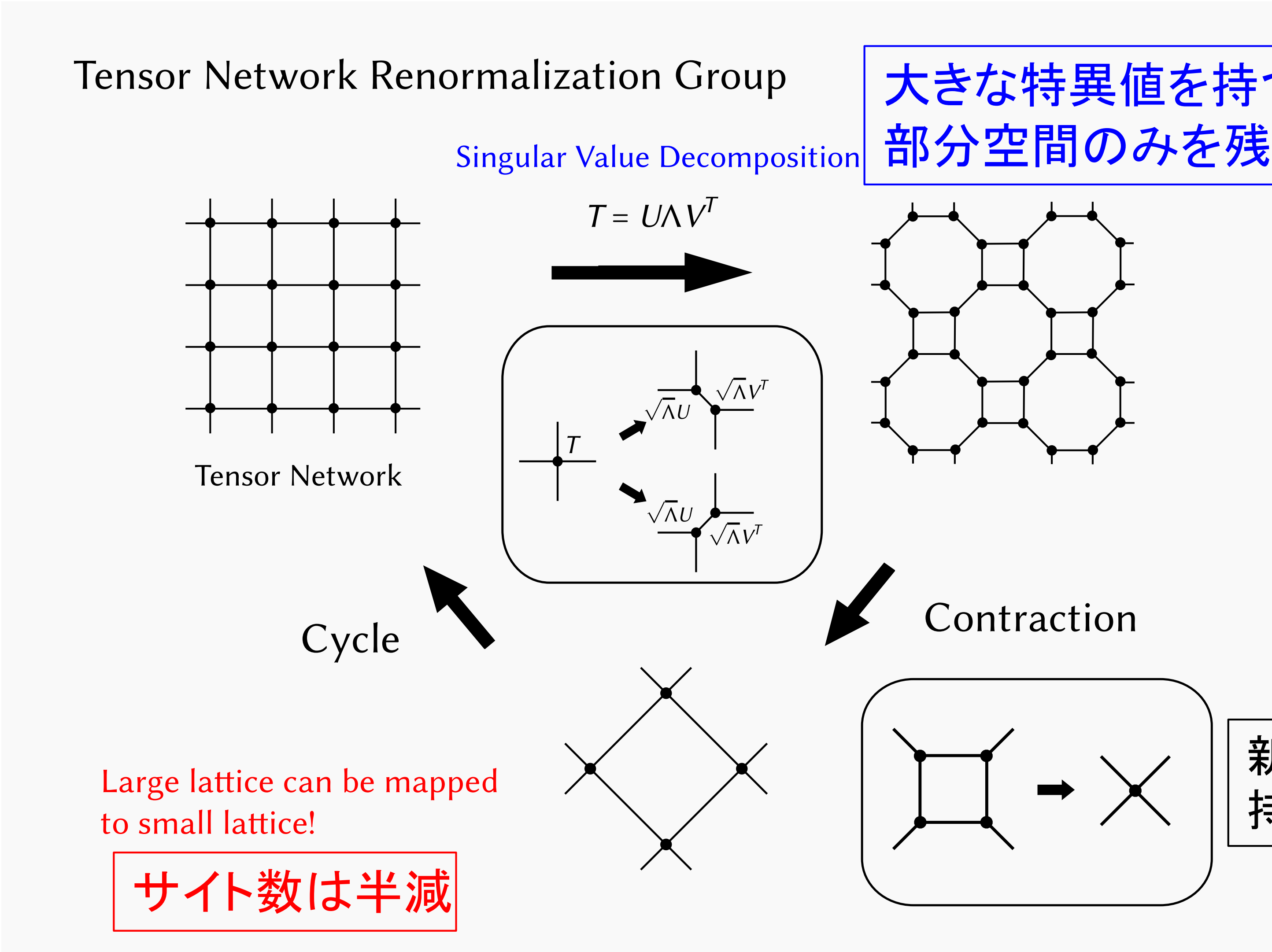
テンソルネットワーク表現

モデルの詳細は初期テンソルのみに依存
計算アルゴリズムはモデルと独立

勿論，サイト数Nが大きくなれば添字の縮約の完全実行は不可能
⇒ どうやって分配関数を評価するか？

TRGアルゴリズムの概略

1. サイト上のテンソルTに対する特異値分解
2. 古い添字の縮約 (疎視化)
3. 手続きの反復



大きな特異値を持つ部分空間のみを残す

サイト数は半減

新しい添字を持つテンソル

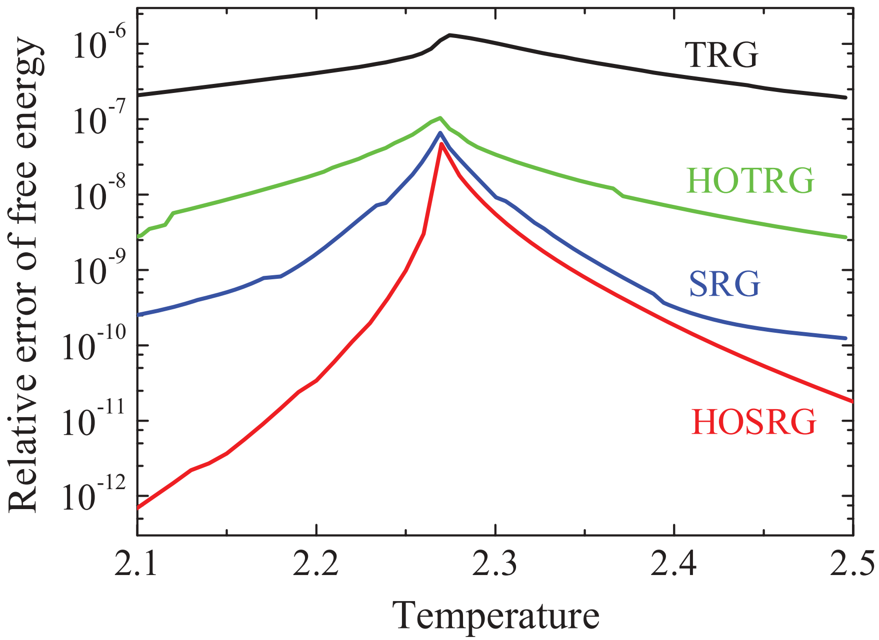
2Dイジングモデルを使ったテスト

アルゴリズムの要諦は特異値分解を用いた低ランク近似

$$T_{i,j,k,l} \simeq \sum_{m=1}^{\mathrm{D_{cut}}} U_{\{k,l\},m} \Lambda_m V_{\{i,j\},m}$$

誤差をコントロールするパラメーターはD_{cut}

転移点近傍での自由エネルギーの厳密解からの相対誤差,
格子サイズ=$2^{30\sim50}$, D_{cut}=24



Xie et al.
PRB86(2012)045139

Onsagerの厳密解との比較
相対誤差：$\leq 10^{-6}$

特異値分解(Singular Value Decomposition)

任意のm×n実行列Aは　$A=U\Sigma V^T$ と分解できる

U: m×mの直交行列

V: n×nの直交行列

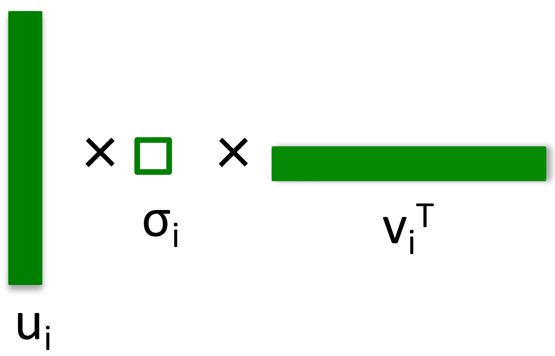
$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \cdots, \sigma_n)$　　$(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0)$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \cdots, \sigma_n$はAの特異値で非負

Uの各列$u_1, u_2, \cdots, u_n$とVの各列$v_1, v_2, \cdots, v_n$を用いたランク1の行列和に分解,

$$A=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\cdots+\sigma_n u_n v_n^T$$

$\sigma_i u_i v_i^T=$



行列の近似

行列Aの近似

$$A=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\cdots+\sigma_k u_k v_k^T+\cdots+\sigma_n u_n v_n^T$$

$A_k=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\cdots+\sigma_k u_k v_k^T$　（行列k個の和で近似）

近似誤差は$\|A-A_k\|_F$で定義

$$\|A-A_k\|_F=(\sigma_{k+1}^2+\sigma_{k+2}^2+\cdots+\sigma_n^2)^{1/2}$$

ただし, $\|A\|_F=(\mathrm{Tr}(A^TA))^{1/2}=(\Sigma_i \Sigma_j a_{ij}^2)^{1/2}$

情報圧縮の手段として画像圧縮などに利用

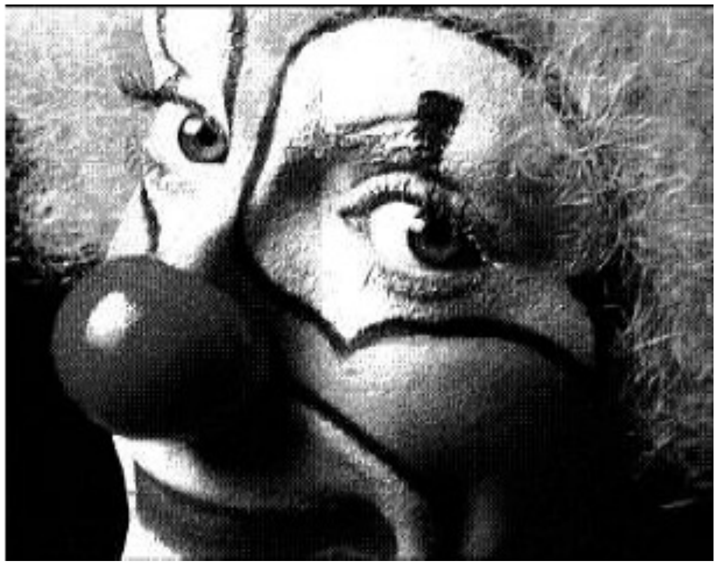
特異値分解(SVD)を用いた画像圧縮

200x320ピクセルの画像データ ⇒ 200x320実行列A

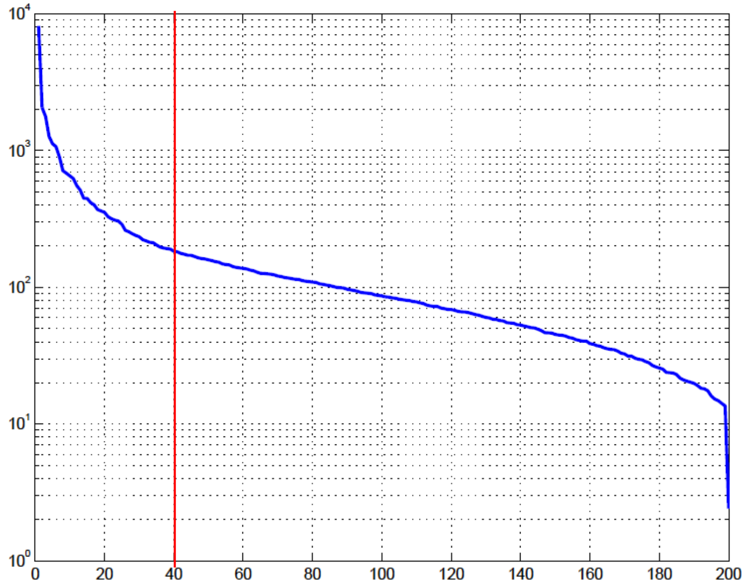
行列を特異値分解

$$A=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\ldots+\sigma_n u_n v_n^T \quad (n=200)$$

サンプル画像(200x320ピクセル)



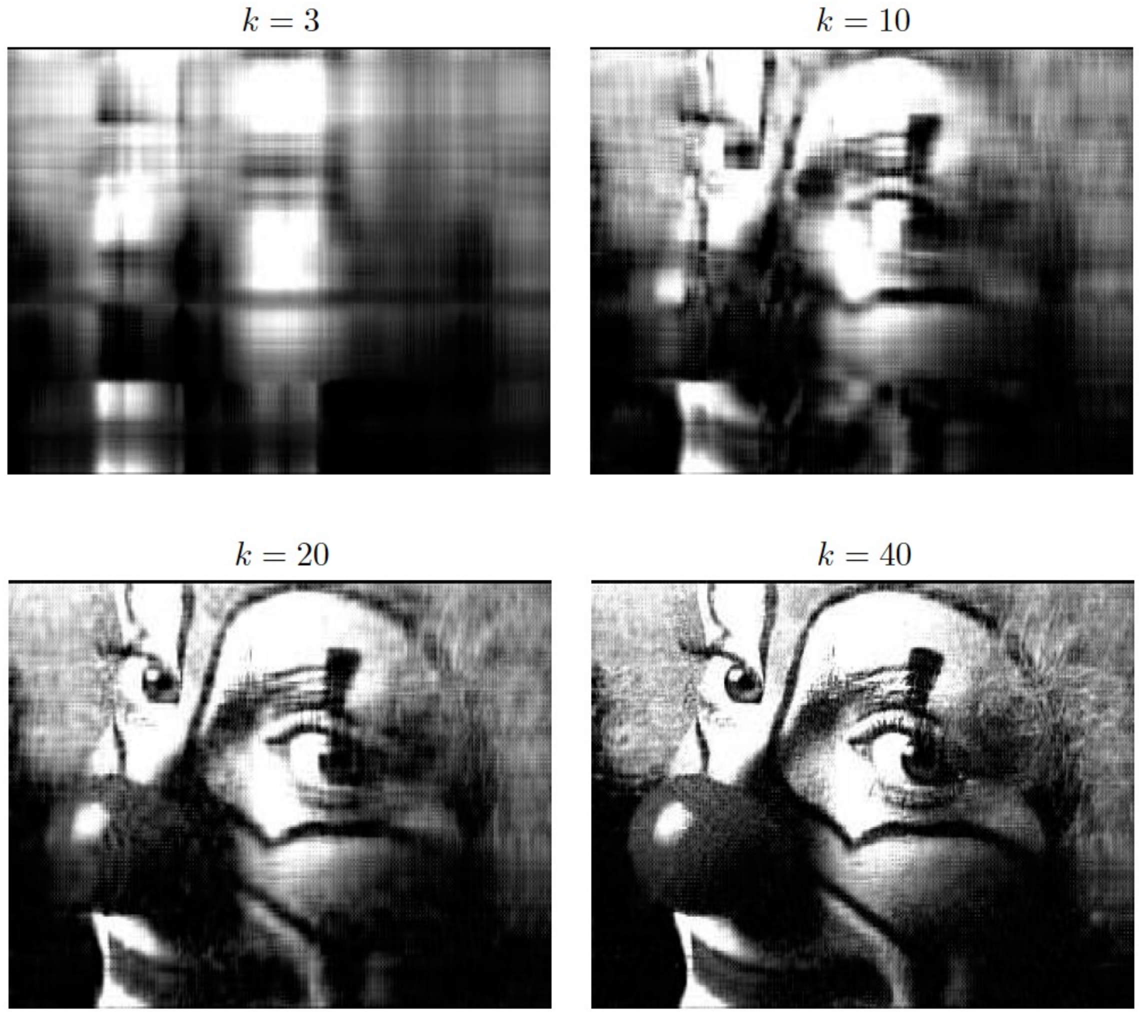
特異値の分布(大→小)



J. Demmel: Applied Numerical Linear Algebra, SIAM 1997

復元画像の品質

$A_k=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\ldots+\sigma_k u_k v_k^T \quad (k \ll 200)$



J. Demmel: Applied Numerical Linear Algebra, SIAM 1997

モンテカルロ法との相違点

モンテカルロ法 確率的手法	→	テンソル繰り込み群 決定論的手法

コペルニクス的転換

- モンテカルロ法における符号問題および複素作用問題がない

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \ \exp(-S_{\mathrm{Re}}[\phi] + iS_{\mathrm{Im}}[\phi])$$

- L^Dのシステムサイズに対する計算コスト$\propto D \times \log(L)$
- グラスマン数を直接扱うことが可能
- 分配関数Zそのものを計算可能

⇩

素粒子物理：軽いクォークのダイナミクス，有限密度QCDの相構造解析
Strong CP問題などの研究に応用可能
物質科学：強相関量子系，金属絶縁体転移，高温超伝導などの
研究に応用可能 (ハバードモデル)

TRG法の素粒子物理への応用(1)

<u>2次元モデル</u>

CP(1)モデル : Kawauchi-Takeda, PRD93(2016)114503

実ϕ^4理論 :

Shimizu, Mod.Phys.Lett.A27(2012)1250035,

Kadoh-YK-Nakamura-Sakai-Takeda-Yoshimura, JHEP1905(2019)184

有限密度における複素ϕ^4理論 :

Kadoh-YK-Nakamura-Sakai-Takeda-Yoshimura, , JHEP2002(2020)161

θ項(トポロジカル項)を持つU(1)ゲージ理論 :

YK-Yoshimura, JHEP2004(2020)089

Schwingerモデル(2次元QED), θ項(トポロジカル項)を持つSchwingerモデル :

Shimizu-YK, PRD90(2014)014508, PRD90(2014)074503,
PRD97(2018)034502

有限密度におけるGross-Neveuモデル :

Takeda-Yoshimura, PTEP2015(2015)043B01

N=1 Wess-Zuminoモデル(超対称性理論) :

Kadoh-YK-Nakamura-Sakai-Takeda-Yoshimura, JHEP1803(2018)141

符号問題解決の検証, スカラー場・フェルミオン場・ゲージ場の計算手法開発

TRG法の素粒子物理への応用(2)

4次元モデル

Isingモデル:

Akiyama-YK-Yamashita-Yoshimura, PRD100(2019)054510

有限密度における複素ϕ^4理論:

Akiyama-Kadoh-YK-Yamashita-Yoshimura, JHEP2002(2020)161

実ϕ^4理論:

Akiyama-YK-Yoshimura, PRD104(2021)034507

有限密度におけるNambu–Jona-Lasinio(NJL)モデル:

Akiyama-YK-Yamashita-Yoshimura, JHEP2101(2021)121

⇒ 研究の重心は2次元モデル・理論から4次元モデル・理論へ移行

4次元スカラー場の理論，フェルミオン場の理論への応用は成功

4次元ゲージ理論は？

有限密度におけるZ_2ゲージヒッグスモデル:

Akiyama-YK, JHEP2205(2022)102

有限密度におけるZ_2ゲージヒッグスモデル(1)

Akiyama-YK, JHEP2205(2022)102

有限密度Z_2ゲージヒッグスモデル(最も簡単な4次元ゲージ場+物質場の系)

$$Z = \left(\prod_{n,\nu} \sum_{U_\nu(n)=\pm 1}\right)\left(\prod_{n} \sum_{\sigma(n)=\pm 1}\right) \mathrm{e}^{-S}$$

$$S = -\beta \sum_{n\in\Lambda_{d+1}} \sum_{\nu>\rho} U_\nu(n)U_\rho(n+\hat{\nu})U_\nu(n+\hat{\rho})U_\rho(n)$$
$$- \eta \sum_{n}\sum_{\nu}\left[\mathrm{e}^{\mu\delta_{\nu,d+1}}\sigma(n)U_\nu(n)\sigma(n+\hat{\nu}) + \mathrm{e}^{-\mu\delta_{\nu,d+1}}\sigma(n)U_\nu(n-\hat{\nu})\sigma(n-\hat{\nu})\right]$$

$U_\mu(n)$: 格子点nにおけるリンク変数，Z_2={±1}

$\sigma(n)$: 格子点nにおける物質場(スピン)，Z_2={±1}

β : 逆ゲージ結合定数

η : ゲージ不変スピン-スピン結合定数

μ : 化学ポテンシャル(密度をコントロール)

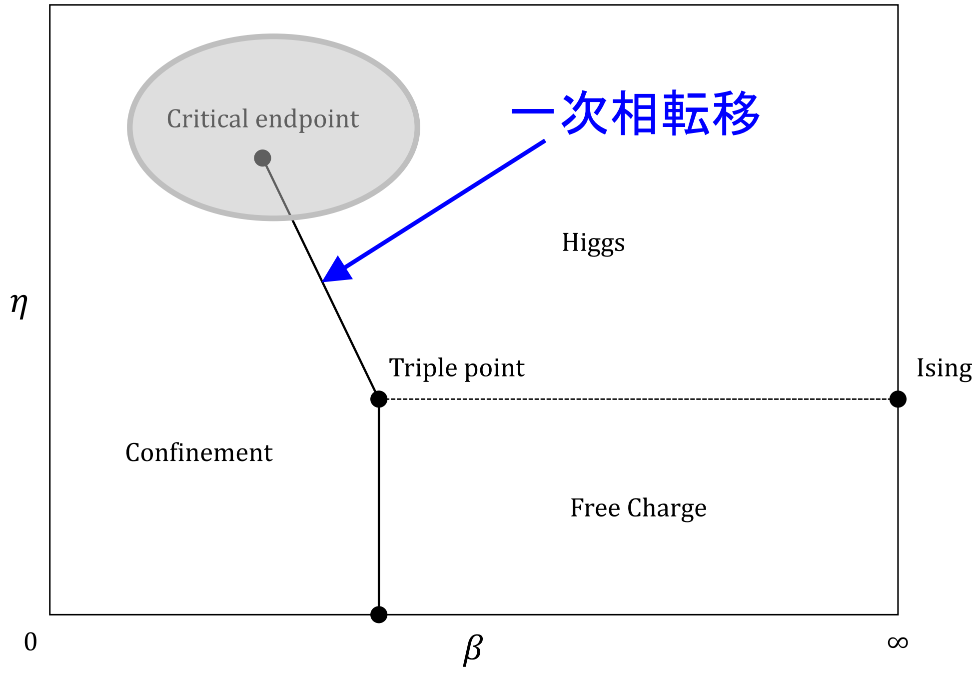
a : 格子間隔(a=1)

有限密度におけるZ_2ゲージヒッグスモデル(1)

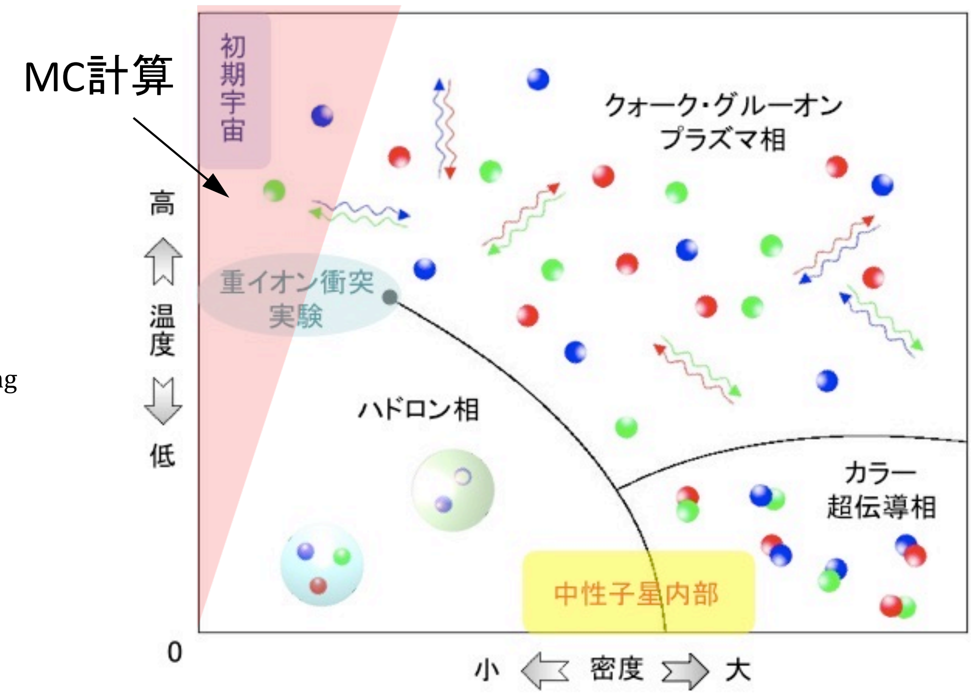
Akiyama-YK, JHEP2205(2022)102

Z_2ゲージヒッグスモデルはQCDと同様に臨界終点が存在

Z_2ゲージヒッグスモデルで期待されている相図



QCDで期待されている相図



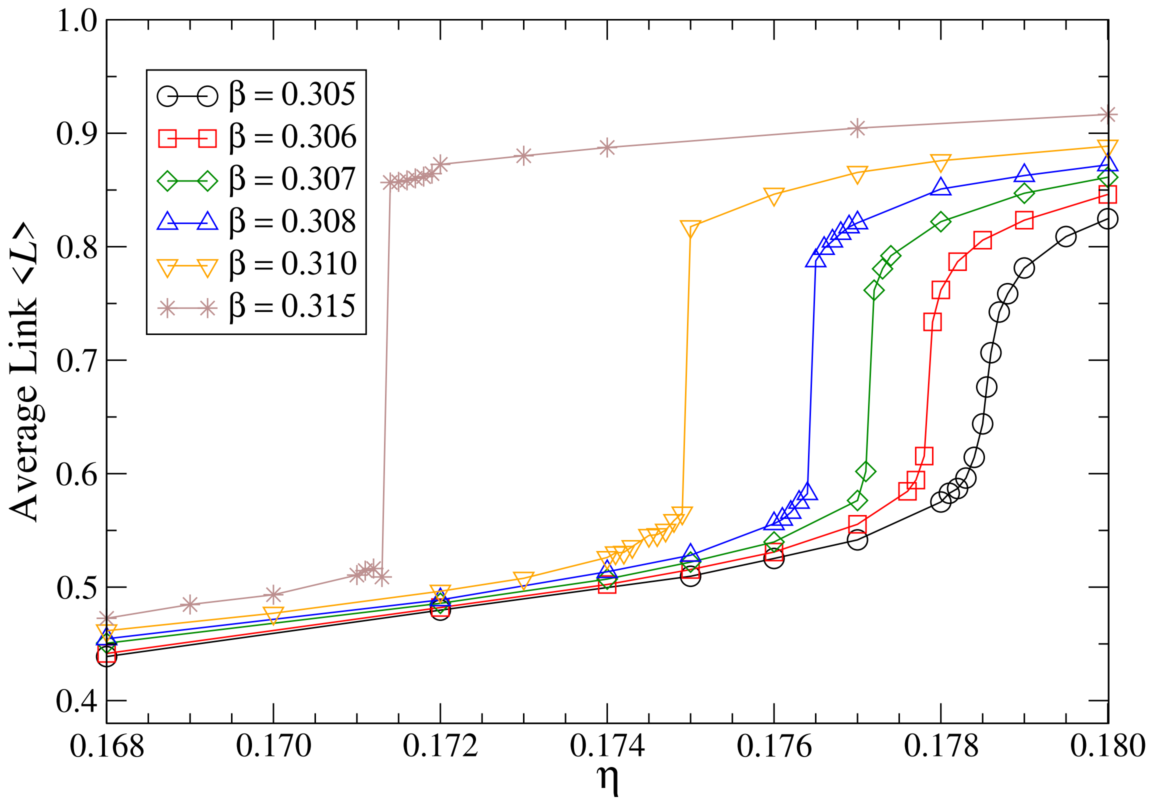
臨界終点をうまく決定できるか？

ゼロ密度(μ=0)における臨界終点の決定(1)

Akiyama-YK, JHEP2205(2022)102

リンク期待値の不連続性(トビ)で一次相転移を同定

$$\langle L \rangle = \frac{1}{(d+1)V}\frac{\partial \ln Z}{\partial (2\eta)}$$ (d=3, V=32^4, D_{cut}=48)



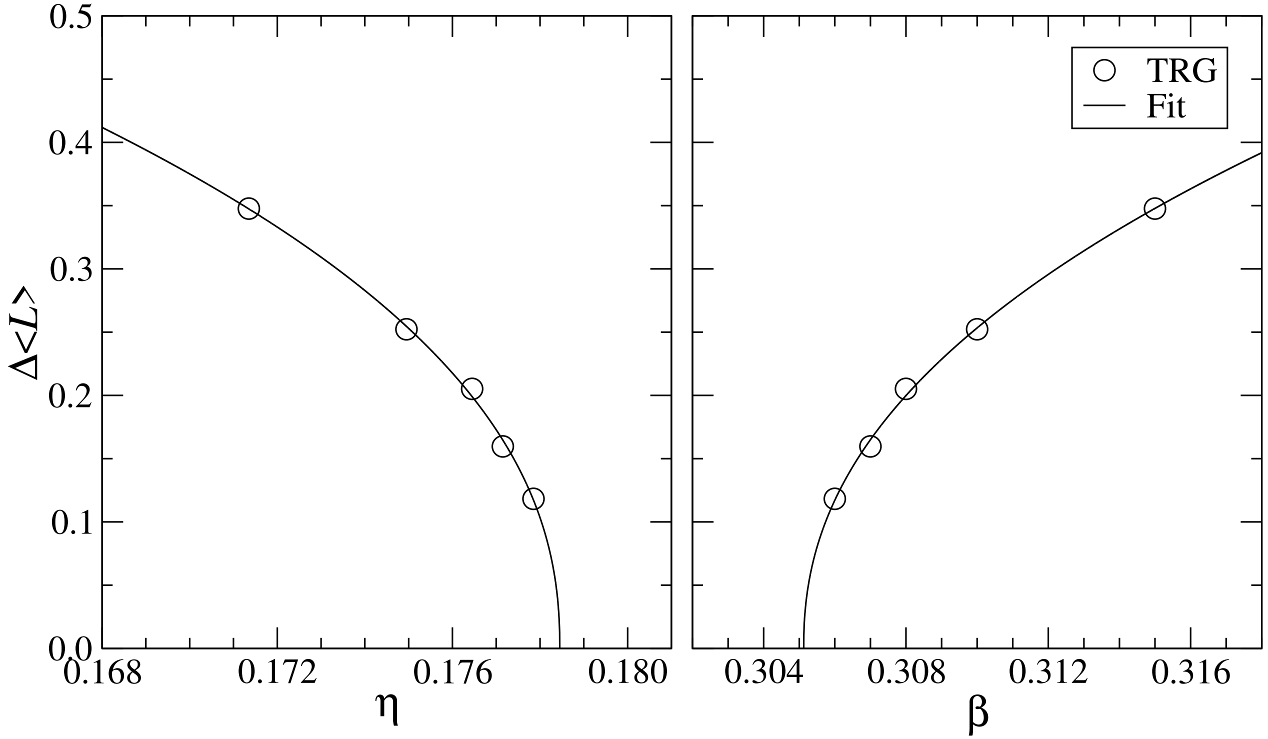
$\langle L \rangle$の不連続性が消える点(β_c,η_c)が臨界終点

ゼロ密度(μ=0)における臨界終点の決定(2)

Akiyama-YK, JHEP2205(2022)102

$\Delta\langle L\rangle$(リンク期待値のトビ)がゼロになる点を外挿で決定

$\Delta\langle L\rangle = A(\eta-\eta_c)^q$　　　$\Delta\langle L\rangle = B(\beta-\beta_c)^p$

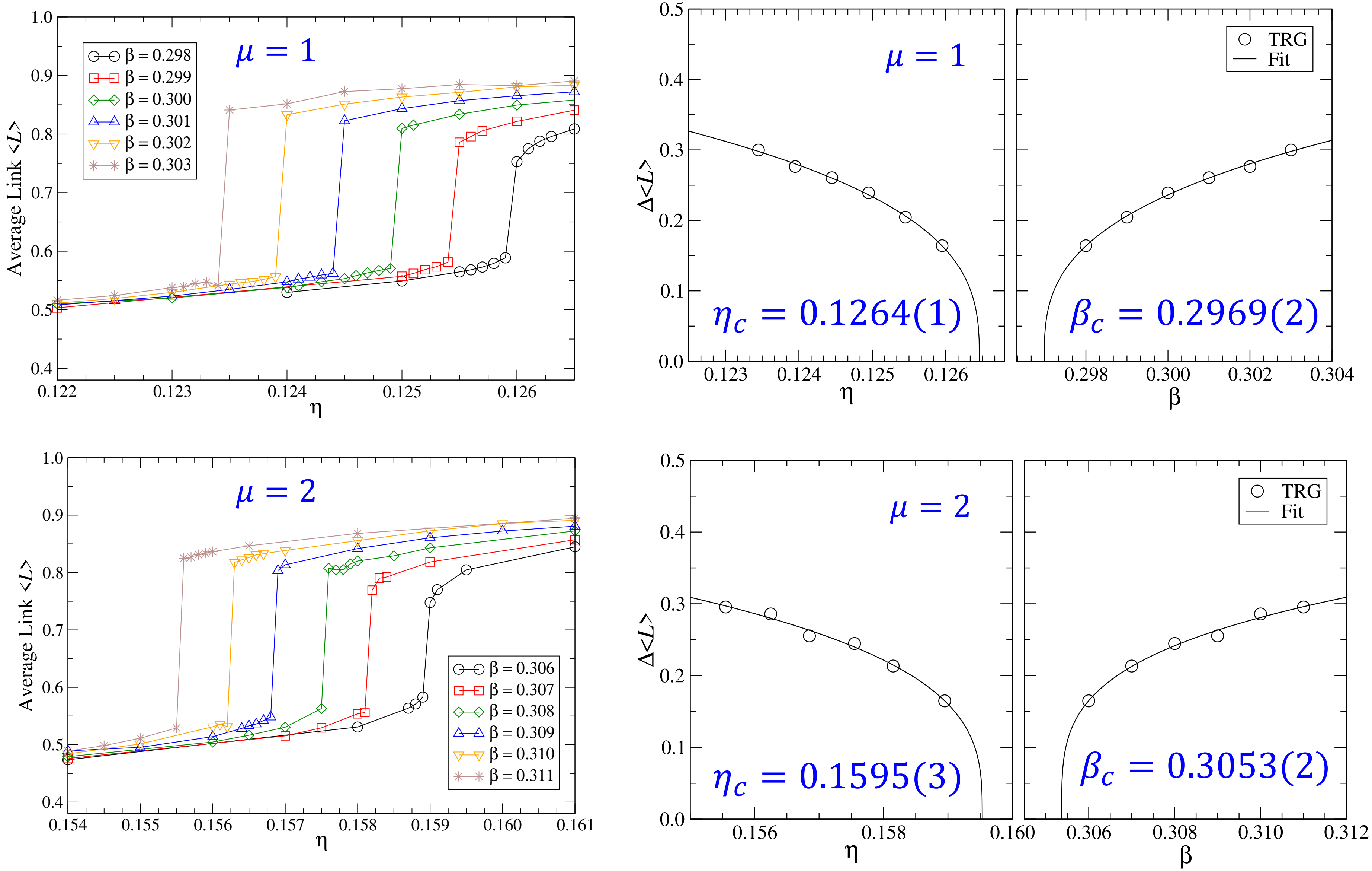


臨界終点 : (β_c,η_c)=(0.3051(2),0.1784(2))

有限密度($\mu \neq 0$)における臨界終点の決定(1)

Akiyama-YK, JHEP2205(2022)102

$\mu = 0$の計算を$\mu = 1,2$でも実行して(β_c, η_c)を決定



まとめ

- モンテカルロ法における符号問題および複素作用問題がない

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \ \exp(-S_{\rm Re}[\phi] + iS_{\rm Im}[\phi])$$

- L^Dのシステムサイズに対する計算コスト∝D×log(L)
- グラスマン数を直接扱うことが可能
- 分配関数Zそのものを計算可能

⇓

素粒子物理：軽いクォークのダイナミクス，有限密度QCDの相構造解析
Strong CP問題などの研究に応用可能
物質科学：強相関量子系，金属絶縁体転移，高温超伝導などの
研究に応用可能 (ハバードモデル)

現段階：
4次元理論(スカラー，フェルミオン，ゲージ)の計算が可能になった
有限密度Z_2ゲージヒッグスモデルの計算に成功
⇒ 連続群(U(1))・非可換群(SU(2),SU(3))への応用