

# Critical endpoint of (3+1)-dimensional finite-density $\mathbb{Z}_3$ gauge-Higgs model w/ tensor renormalization group

Shinichiro Akiyama <sup>a), b)</sup>

a) CCS, University of Tsukuba (CCS素粒子物理研究部門)

b) Department of Physics, University of Tokyo (藤堂研)

Based on [SA-Kuramashi, arXiv:2304.07934\[hep-lat\]](#)

TCHoU Research Member Meeting / Activity and Achievement Reports

2023.6.27

# 自己紹介

## 経歴

- 2013/4～2017/3 ICU, 学部生(平島先生の研究室)
- 2017/4～2022/3 筑波大学, 大学院生(素粒子理論研究室)
- 2022/4～2023/5 東京大学量子ソフトウェア寄附講座, 特任助教
- 2023/6～ 筑波大学CCS, テニユアトラック助教
- 2023/6～ 東京大学藤堂研, 客員研究員

## 研究テーマ

- ・ テンソルネットワーク法を使った格子理論の研究
- ・ テンソルネットワークによる情報圧縮やサンプリングによる情報抽出の組み合わせによるアルゴリズムの研究

# テンソルネットワーク(TN)とは?

Orús, APS Physics 1(2019)538-550

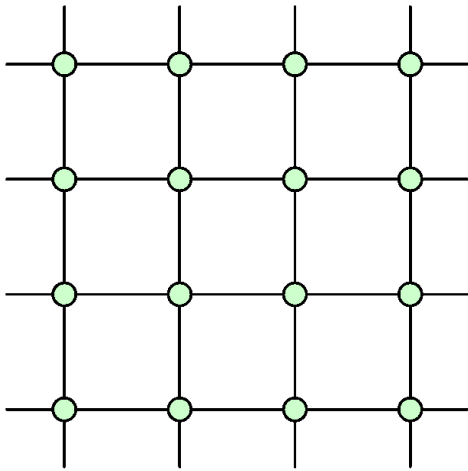
- ✓ 目的関数をテンソルの縮約で表現して得られる量子多体系の解析手法
- ✓ 従来とは異なる切り口から格子理論を調べることができる
  - ・ TN計算には符号問題がない
    - ・ モンテカルロ計算が難しい理論を調べられる場合がある
  - ・ 量子計算との互恵関係
    - ・ 量子回路のTNシミュレーション

# テンソル繰り込み群(TRG)によるアプローチ

- ✓ 格子理論の経路積分をTNで表現し,その縮約を近似的に実行することで経路積分を求値する手法
- ✓ 縮約の近似精度はボンド次元をあげることで系統的に向上可能(後述)
- ✓ 従来のMCシミュレーションにはない利点が多い
  - ・ 符号問題がない
  - ・ 熱力学極限に匹敵する格子体積を取り扱える
  - ・ Grassmann積分を直接扱える(pseudo fermionの導入が不要)
  - ・ 格子理論の分配関数/経路積分そのものを求値できる
- ✓ TRGは4次元系への応用が最も進んでいるTN法

# テンソル繰り込み群のidea

経路積分をTNで表現  
(厳密な縮約は実行不可能)



## 実空間繰り込み群の思想

容易に反復可能な粗視化変換を構成し  
それを何回も反復することで熱力学極限を得る

+

## 特異値分解(SVD)による情報圧縮

$$A_{ij} = \sum_k U_{ik} \sigma_k V_{jk} \approx \sum_{k=1}^D U_{ik} \sigma_k V_{jk}$$

$$w/ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$$

- $A$ :  $m \times n$  matrix,  $U$ :  $m \times m$  unitary,  $V$ :  $n \times n$  unitary
- $D$ : ボンド次元

↓

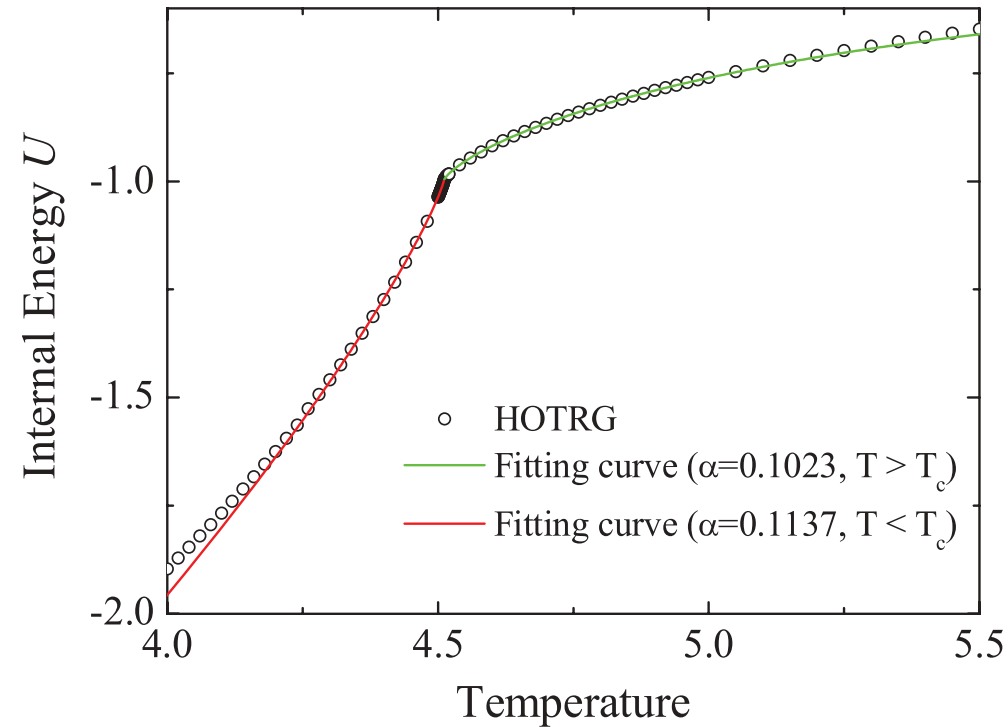
TN上での実空間繰り込み群  
(テンソル繰り込み群) を構成できる

# TRGの応用例: 3D ferromagnetic Ising model

Xie+, PRB86(2012)045139

内部エネルギー

臨界点



Method	$T_c$
HOTRG ( $D = 16$ , from $U$ )	4.511544
HOTRG ( $D = 16$ , from $M$ )	4.511546
Monte Carlo <sup>37</sup>	4.511523
Monte Carlo <sup>38</sup>	4.511525
Monte Carlo <sup>39</sup>	4.511516
Monte Carlo <sup>35</sup>	4.511528
Series expansion <sup>40</sup>	4.511536
CTMRG <sup>12</sup>	4.5788
TPVA <sup>13</sup>	4.5704
CTMRG <sup>14</sup>	4.5393
TPVA <sup>16</sup>	4.554
Algebraic variation <sup>41</sup>	4.547

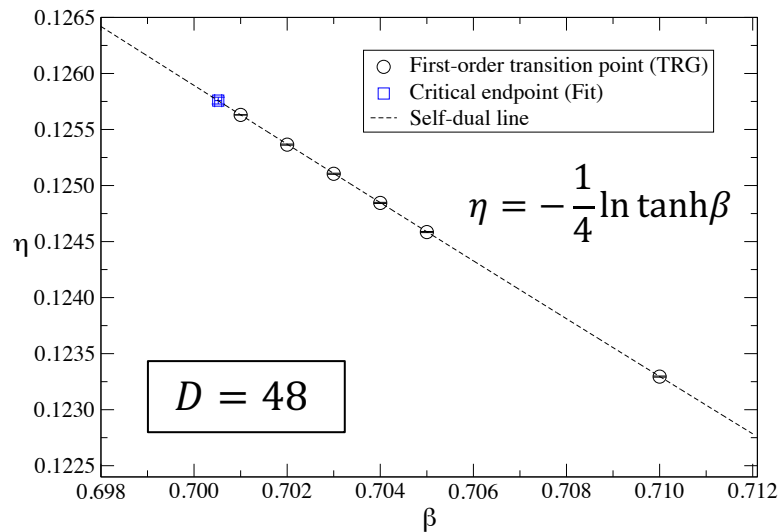
✓ MC計算とよく一致

# TRGの応用例: 3D $\mathbb{Z}_2$ gauge-Higgs model

SA-Kuramashi, JHEP05(2022)102

- ✓ 自己双対性を持つ格子ゲージ理論. 双対性から転移点が解析的に分かる.
- ✓ TRGの数値結果は解析的な議論・MC計算のいずれともconsistent.

相転移線とself-dual lineの比較



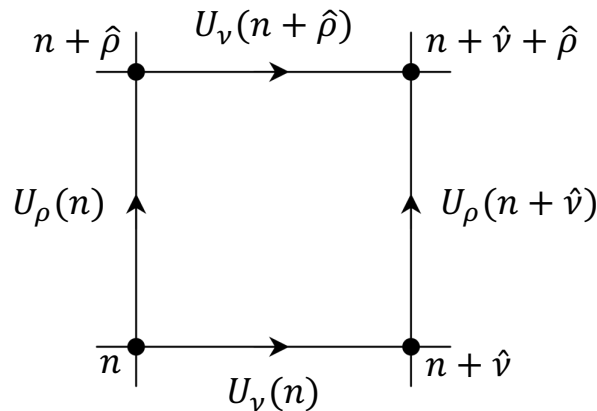
臨界終点

<p>MC</p> <p>Somoza+, PRX11(2021)041008</p>	<p><math>\beta_c \approx 0.701</math></p>
<p>TRG</p> <p>SA-Kuramashi, JHEP05(2022)102</p>	<p><math>\beta_c = 0.70051(7)</math></p>

# $\mathbb{Z}_3$ gauge-Higgs model in the unitary gauge

$$S = -\beta \sum_n \sum_{\nu > \rho} \text{Re}[U_\nu(n) U_\rho(n + \hat{\nu}) U_\nu^*(n + \hat{\rho}) U_\rho^*(n)]$$

$$- \eta \sum_n \sum_\nu [e^{\mu \delta_{\nu,4}} \sigma^*(n) U_\nu(n) \sigma(n + \hat{\nu}) + e^{-\mu \delta_{\nu,4}} \sigma^*(n) U_\nu^*(n - \hat{\nu}) \sigma(n - \hat{\nu})]$$



$U_\nu(n) (\in \mathbb{Z}_3)$ : ゲージ場 (リンク変数)  
 $\sigma(n) (\in \mathbb{Z}_3)$ : 物質場  
 $\beta$ : ゲージ結合定数  
 $\eta$ : スピン結合定数  
 $\mu$ : 化学ポテンシャル

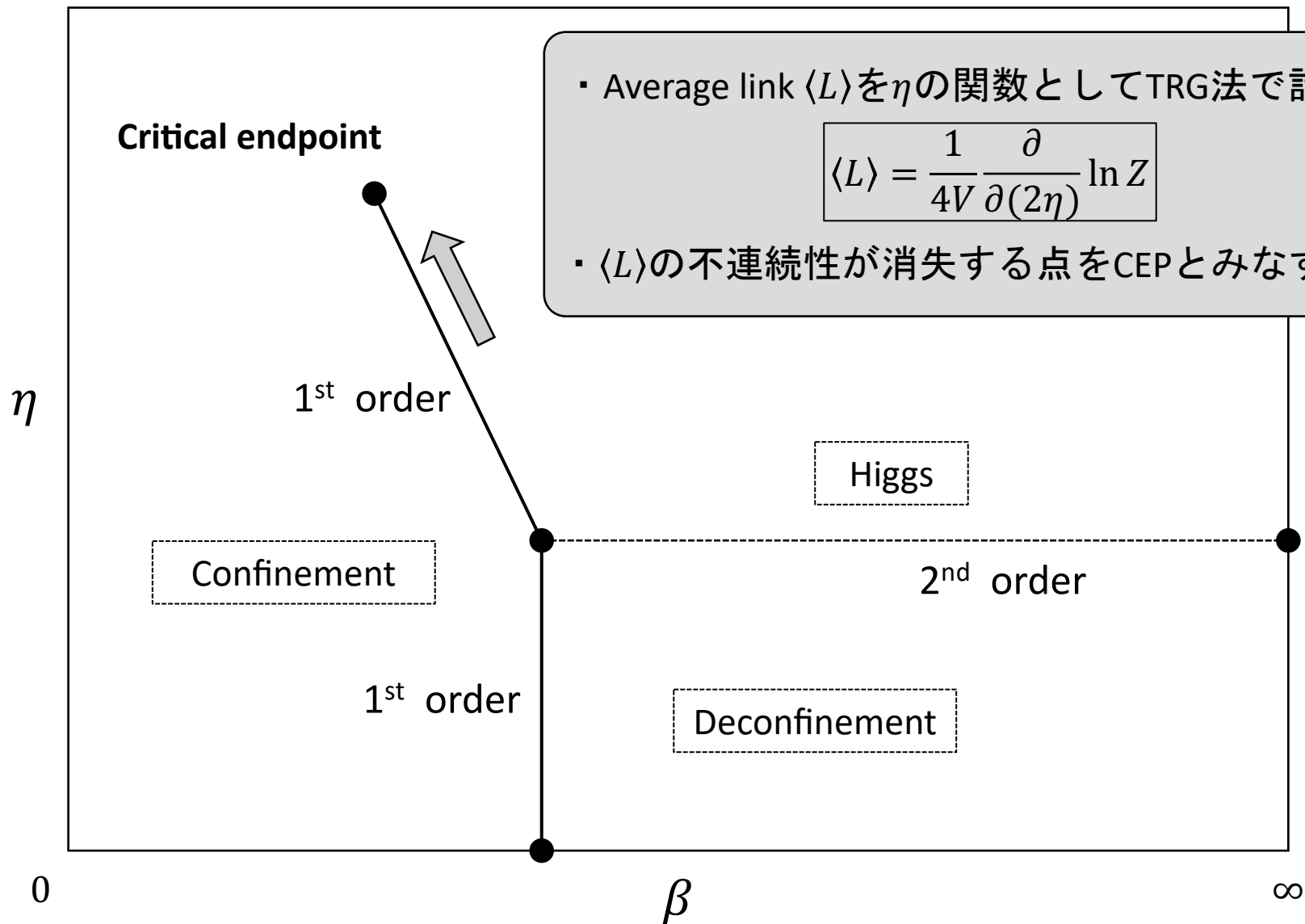
✓ Unitaryゲージに固定して物質場を消去:  $\sigma^*(n) U_\nu(n) \sigma(n + \hat{\nu}) \mapsto U_\nu(n)$

$$S = -\beta \sum_n \sum_{\nu > \rho} \text{Re}[U_\nu(n) U_\rho(n + \hat{\nu}) U_\nu^*(n + \hat{\rho}) U_\rho^*(n)]$$

$$- 2\eta \sum_n \sum_\nu [\cosh(\mu \delta_{\nu,4}) \text{Re} U_\nu(n) + i \sinh(\mu \delta_{\nu,4}) \text{Im} U_\nu(n)]$$



# ゼロ密度での相図



# なぜ $\mathbb{Z}_3$ gauge-Higgs modelを調べるのか

- ✓ 有限密度領域で符号問題が発生する格子ゲージ理論
  - 符号問題を伴う4D格子ゲージ理論のTRG計算は本研究が世界初
- ✓ 閉じ込め相とHiggs相を隔てる一次相転移線には臨界終点(CEP)が伴う
  - CEPの決定は有限温度・密度QCDでも重要な研究課題の一つ
  - 符号問題の生じる領域でもTRG法を使えばCEPの決定は可能か?
- ✓  $\mathbb{Z}_2$  gauge-Higgs modelでの先行研究 [SA-Kuramashi, JHEP05\(2022\)102](#)
  - TRG法によってCEPを決定した. ただし,  $\mathbb{Z}_2$ には符号問題はない
  - 先行研究で用いた Anisotropic TRG (ATRG) アルゴリズムを使用

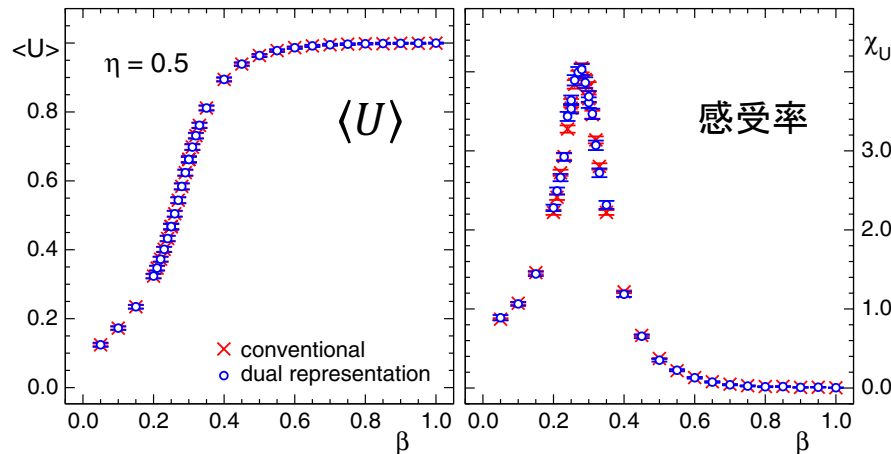
# ゼロ密度での他手法との比較

- ✓ Average plaquette  $\langle U \rangle$  とその感受率をMCシミュレーションの結果と比較
  - ・ ボンド次元  $D = 45$  程度でMCの結果をよく再現している
  - ・ 感受率は  $\langle U \rangle$  の数値微分による

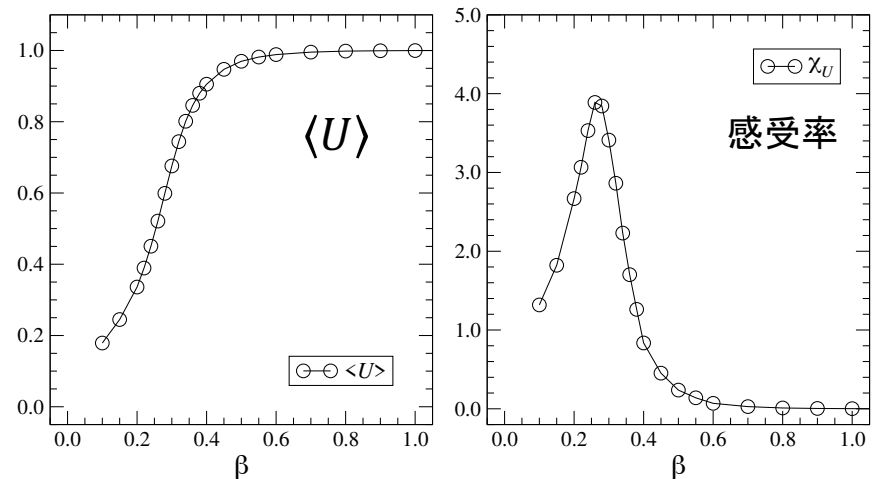
$$\eta = 0.5, \mu = 0$$

MCシミュレーション

Gattringer-Schmidt, PRD86(2012)094506

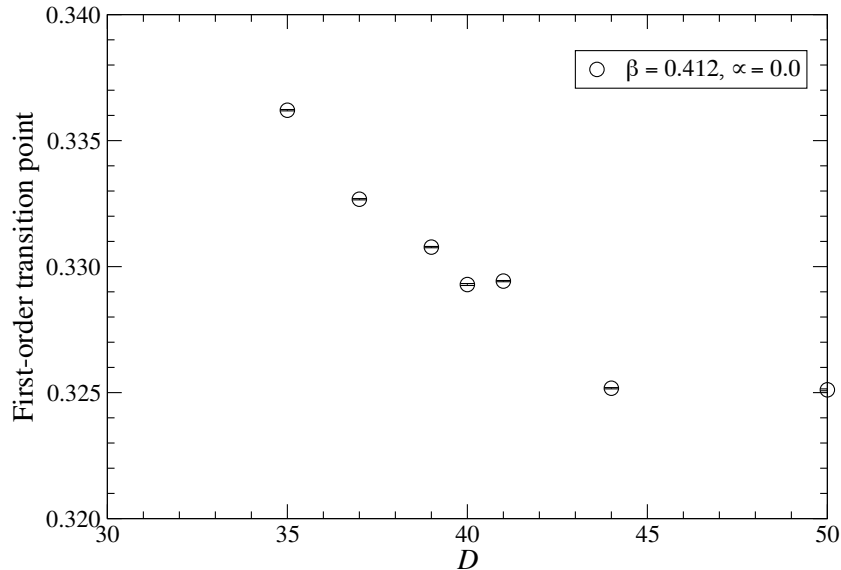


TRG法(本研究) w/  $D = 45$

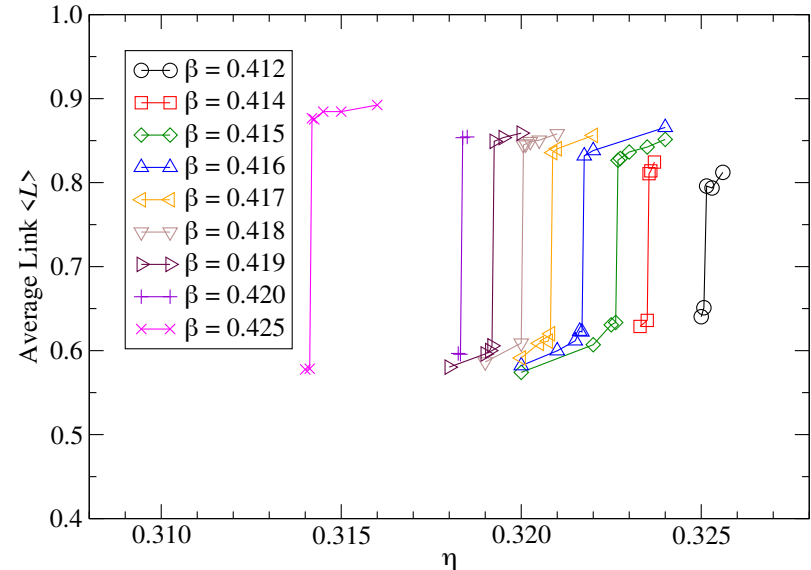


# TRG法による熱力学極限計算 ( $\mu = 0$ )

一次相転移点のボンド次元依存性



Average link@ $D = 50$



✓ 相転移点はボンド次元に関してよく収束している

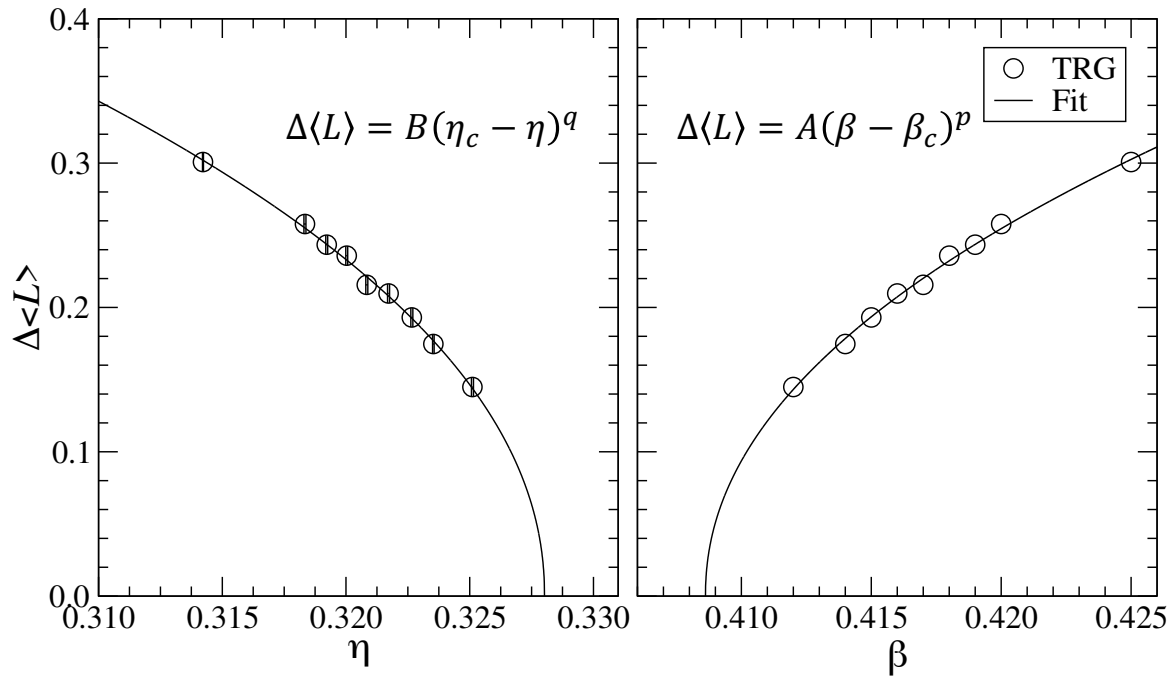
・  $D = 44$ と $D = 50$ との相対誤差は**0.019%**

✓  $\beta$ を小さくしていくと, average linkの不連続性が弱くなっていく

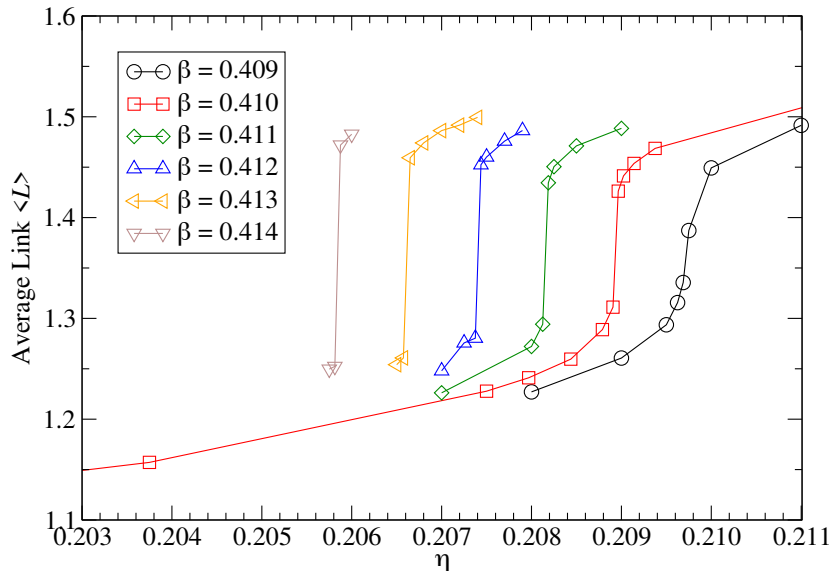
# CEPの決定 ( $\mu = 0$ )

✓ Average linkのトビ  $\Delta\langle L \rangle$ に対するfittingからCEPを決定

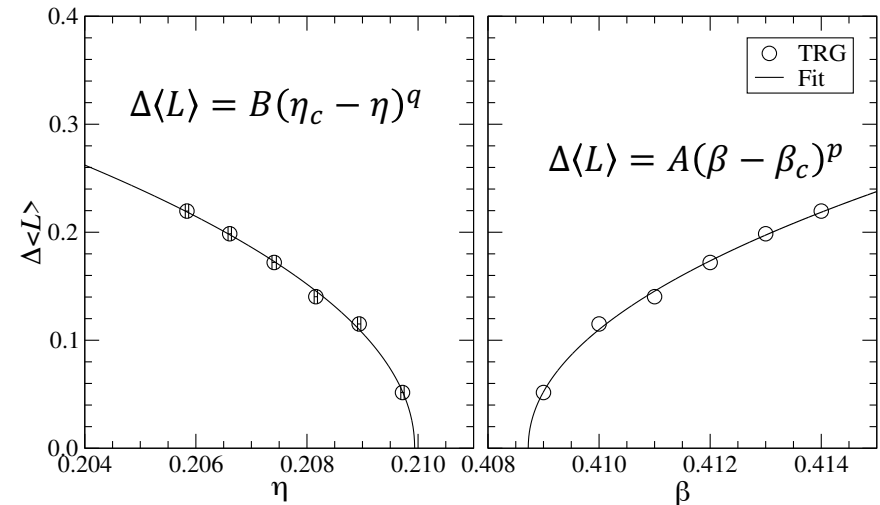
▪  $(\beta_c, \eta_c) = (0.409(7), 0.3280(6))$



# 有限密度の熱力学極限計算とCEPの決定 ( $\mu = 2$ )

Average link@ $D = 50$ 

FittingによるCEPの決定



- ✓ 有限密度の場合も  $\beta$  を小さくしていくと, average link のトビが縮小
- ✓ ゼロ密度の場合と同様に fitting で CEP を決定
  - $(\beta_c, \eta_c) = (0.40873(7), 0.20994(9))$

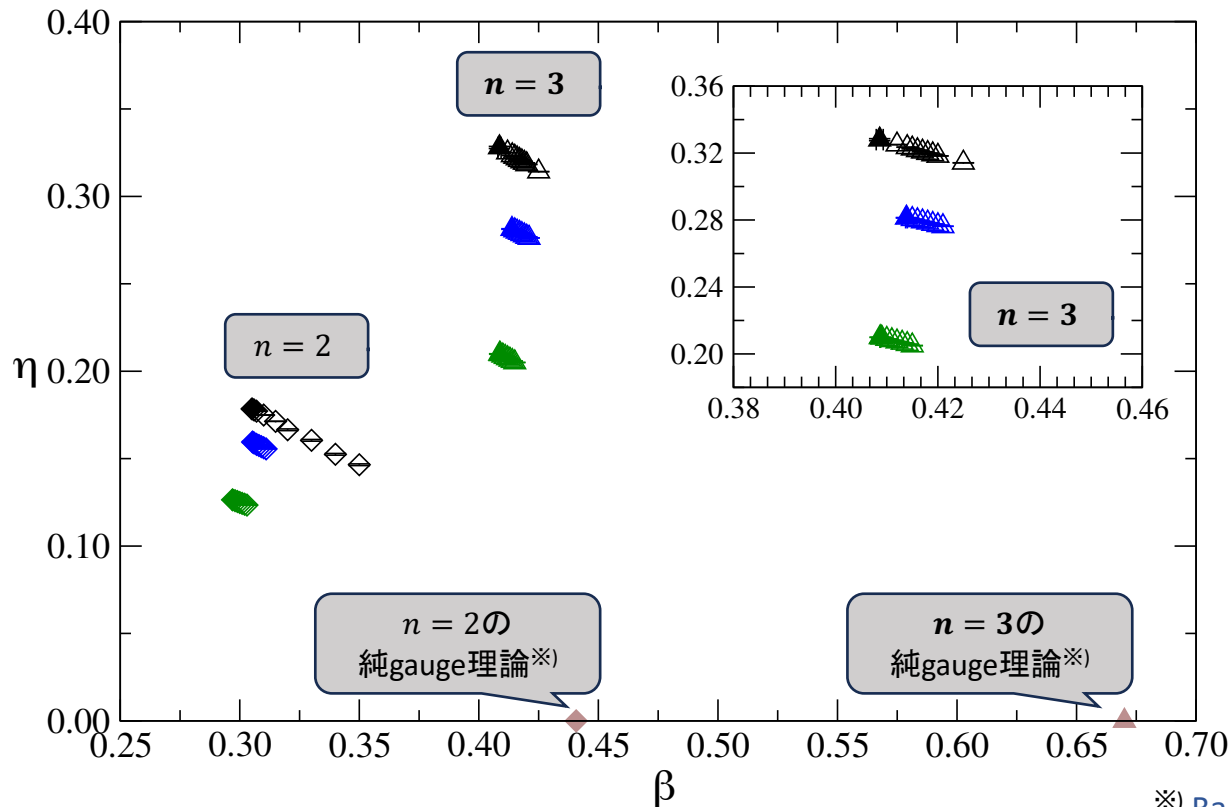
# $\mathbb{Z}_n$ gauge-Higgs model ( $n = 2,3$ )の相図

✓  $\mathbb{Z}_n$ の $n$ が大きくなると, CEPは $\beta$ - $\eta$ 相図上で右斜め上に移動

Cf. U(1) gauge-Higgs studies, Baig-Clua, PRD57(1998)3902, Franzki+, PRD57(1998)6625

▪  $\mu = 0$ (黒),  $\mu = 1$ (青),  $\mu = 2$ (緑)

✓  $n = 2,3$ いずれの場合でも $\eta_c$ は $\mu$ に対してsensitive



※) Balian+, PRD10(1974)3376

# Summary & Outlook

- ✓ TN法を使うことで、従来とは異なる切り口から格子理論を調べられる。  
特に、TN法には符号問題がない。
- ✓ 符号問題を伴う4D格子ゲージ理論に対するTRG法のfirst applicationを実施。
- ✓ 4D  $\mathbb{Z}_3$  gauge-Higgs modelのaverage linkをTRG法で計算し、confinement相とHiggs相を隔てる一次相転移を捉え、average linkの不連続性が消失する点としてCEPを決定した。
- ✓ 有限密度領域でもCEPを決定し、 $\mathbb{Z}_2$  gauge-Higgs modelのCEPとの比較を実施。  
 $\mathbb{Z}_2$ から $\mathbb{Z}_3$ への移行に伴うCEPの動き方はreasonableにみえる。
- ✓ 連続的なゲージ自由度を伴う4次元系のTRG計算は？