

逆問題研究って何？

・ 2014年9月1日

融合科学センター発足記念式典

数学が諸科学 の中で果たす 役割を考える いい機会

- 「狭くとも深く」が研究の原則だけど、「浅くとも広い視野を」という部分も頭のどこかになきゃいけないと思うんだ。
- 両方知っているから一点に集中できる、ということだね。
- それを考えながら数学をやっている姿を紹介したいんです。

今、どれくらい逆問題のコンファレンスがあるのか？

日本国内で定期的に年 1 回 × 2

アジア地区（日中韓）で 2 年に 1 回 × 2

Applied Inverse Problem (International Conference) 2 年に一回

ここ数年 2 年に一度の割で長期 workshop

Newton Institute (Cambridge), Fields Institute (Toronto),

Mittag-Leffler Institute (Stockholm), Henri Poincare Institute (Paris)

他にもいろいろ

例えば 2014年に, Marseille, Madrid, Helsinki, St. Petersburg, Bristol, Taipei

2015年に Nantes, Paris, Helsinki, Beijin,...

どんな話題が 話されている の？

- 逆スペクトル問題、Electrical Impedance Tomography、電磁波の散乱の逆問題、ラドン変換、Tensor Tomography、Wavelet、これらに付随した数値計算例などなんですが。
- そう専門用語を並べられても困る。もっとかみ砕いてくれんかな。

逆問題に関して印象的な仕事

- Ambarzumyan (1929) 天体物理学, 球状星団の分布
- Gelfand-Levitan , On the determination of a differential equation from its spectral function, Izv. Akad. Nauk USSR. Ser. Mat. (1951), 309-360
- M. Kac, “Can one hear the shape of a drum?” Amer. Math. Monthly , 73 (1966), 1-23
- A.P.Calderon, On an inverse boundary value problem, Seminar on a Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasilia de Matematica, Rio de Janeiro (1980), 65-73

私の仕事をお 話しますと

- Electrical Impedance Tomography
- 光学模型 （原子核物理における逆散乱）
- リーマン多様体上での逆散乱理論
- 摂動された格子模型上での逆散乱

EITとは

- 物体に電流を流し、表面での電圧を測定します。表面での観測値から物体内の電気伝導度を調べよう、というものです。
- これはいろいろ応用があります。たとえば人体内の腫瘍は正常な部分との電気伝導度が4倍くらい違います。
- あるいは物体内部の亀裂を推定することもできます。
- 数学としては、ある種の偏微分方程式の解の境界部分での値から、方程式の係数を定める問題になります。
- ちょっと movie をご覧ください。

逆散乱問題とは

- ラザフォードの実験を思い出しましょう。標的に原子、分子のビームをあてます。反射粒子を観測して標的を知ろうというのが逆散乱問題です。
- 数学としてはシュレーディンガー方程式の解の無限遠方での挙動からいわゆるS行列を考え、このS行列から標的のシュレーディンガー作用素の係数を調べる問題です。
- 古典物理学の電磁気学でも同じようなことが考えられます。

光学模型とは

- 光学模型というと、電磁波を扱ったのかな？
- いえ、これはちょっと特殊で多体シュレーディンガー方程式を複素ポテンシャルで近似しようとするものです。原子核物理では基本的なアイディアとされているようなんですが、数学的裏付けはなかったように思います。

多様体って何？

- ようするに遠方から波を送って反射してきた波から物理系を知ろうということやな。リーマン多様体とか格子とかいうのは何かな？
- 少し大風呂敷になりますが、宇宙の彼方から波を送って反射してきた波を宇宙の彼方で観測します。観測データから有限部分の世界がすべて再現できるか、という問題です。
- 宇宙の彼方なんて誰も行ったことがないし、紙の上だけのことだろう。
- シュワルツシルドが計算したことによればアインシュタインの方程式の解で片方の無限遠方はユークリッド的、もう一方の無限遠方は双曲空間的というものがあります。この辺は否定も肯定もできないところでしょう。

格子って何？

- 格子の方は何？
- 物質は（多くの場合）原子が周期的に並んで構成されています。その構造を理解するための基本的モデルです。
- やはりシュレーディンガー方程式を考えるのかな？
- 格子上のラプラシアンを考えるんですが、それは偏微分方程式ではなくて、いわば偏差分方程式になります。これもなかなか大変です。

六角格子

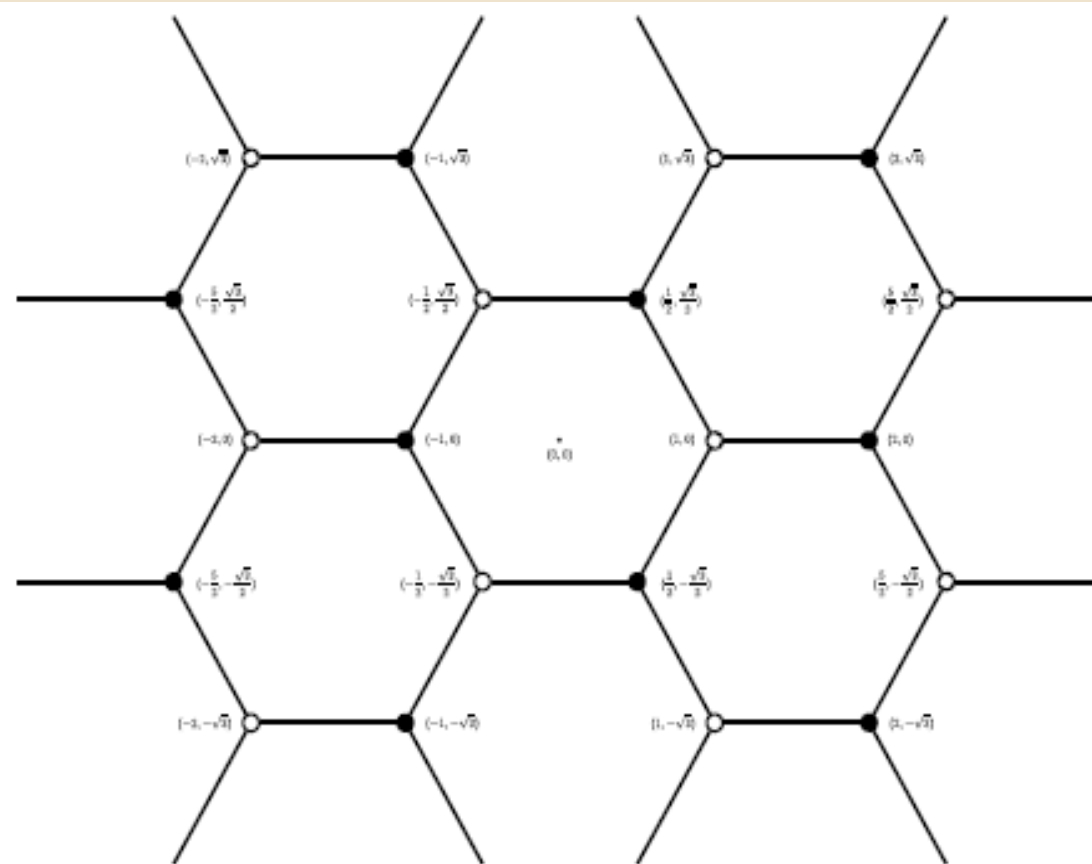


FIGURE 3. Hexagonal lattice

カゴメ格子

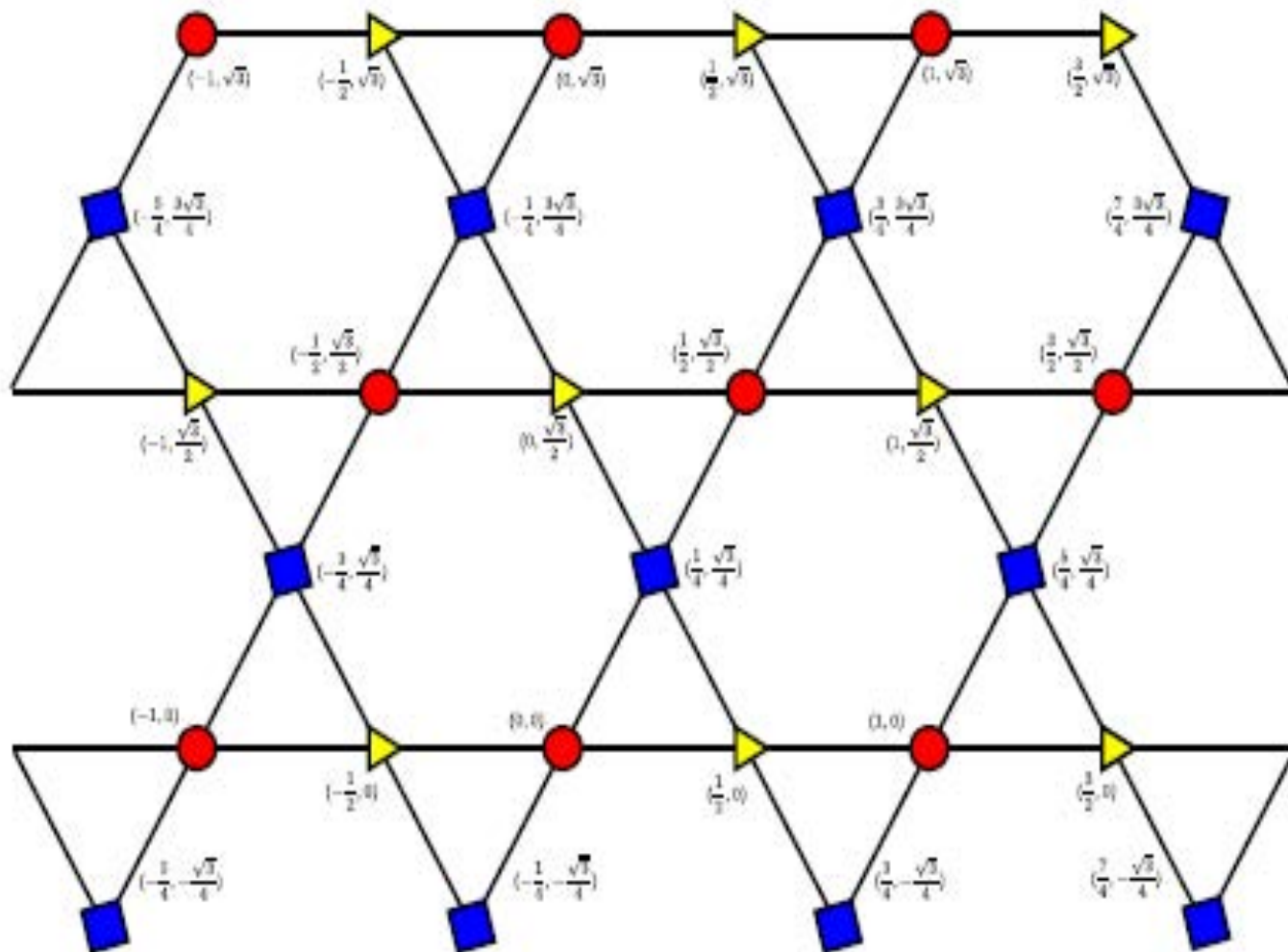
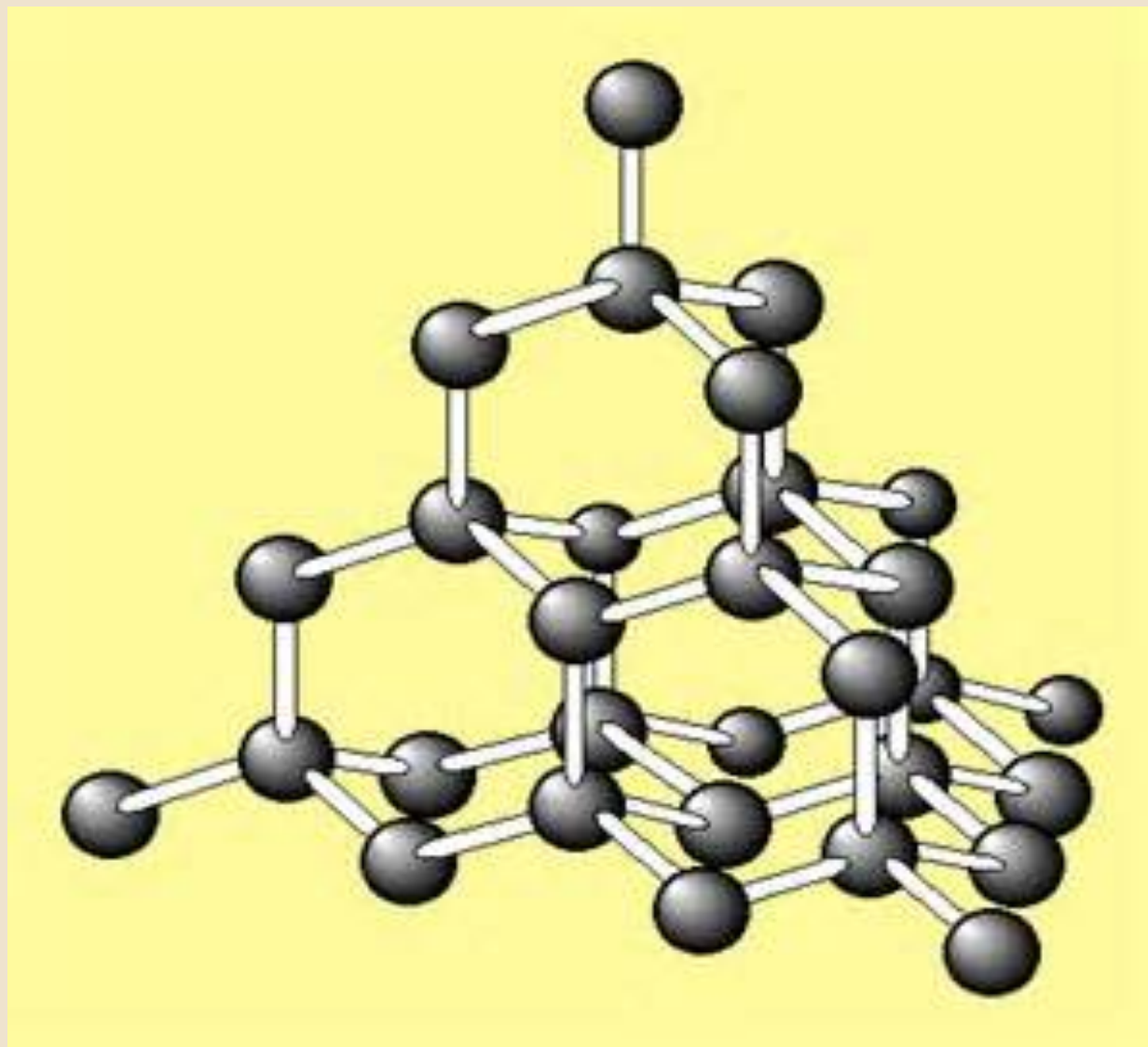
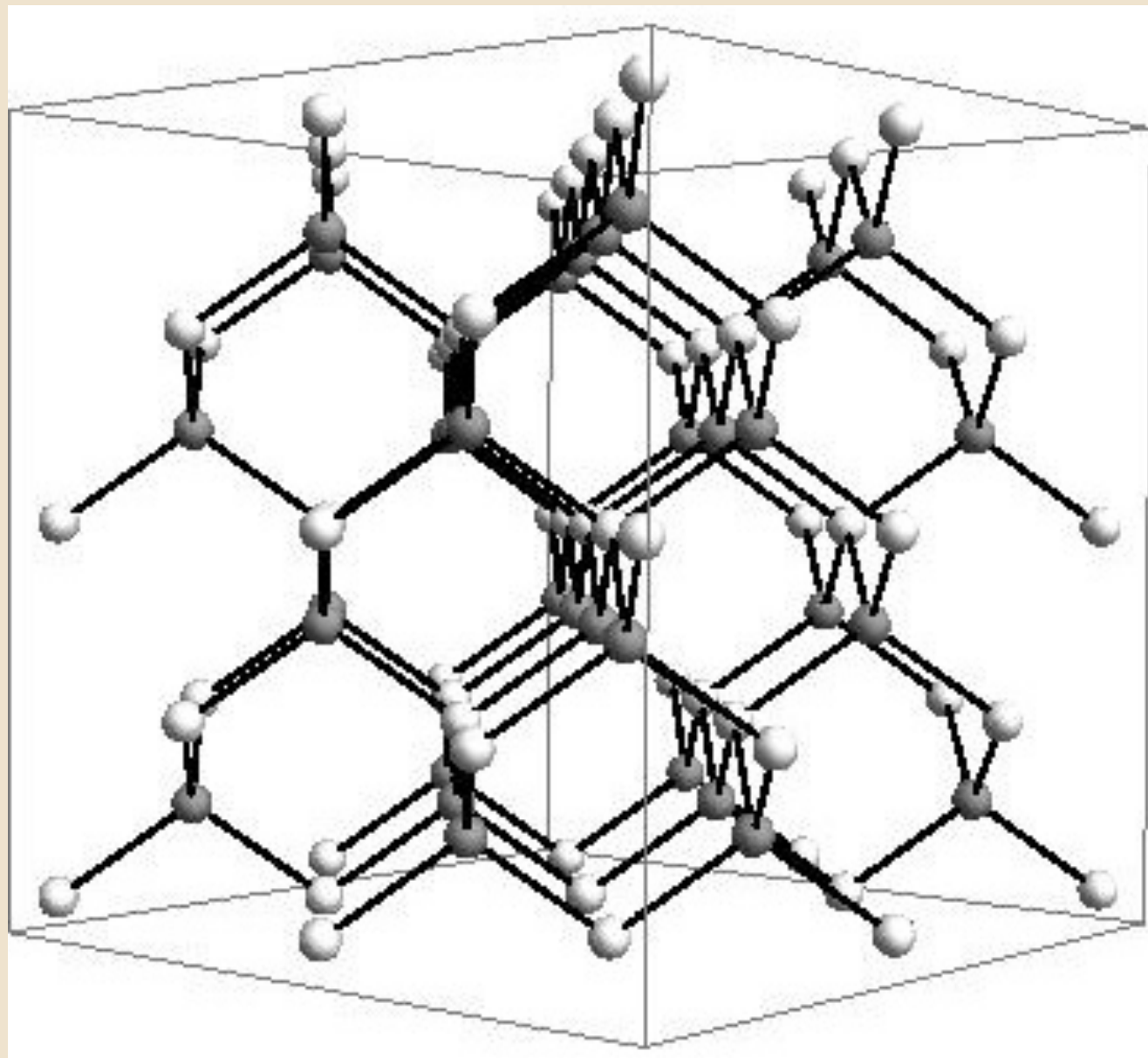


FIGURE 4. Kagome lattice

ダイヤモンド
格子（六角格
子の3次元
版）



ダイヤモンド
格子を別の角
度から見ます
と



グラファイト

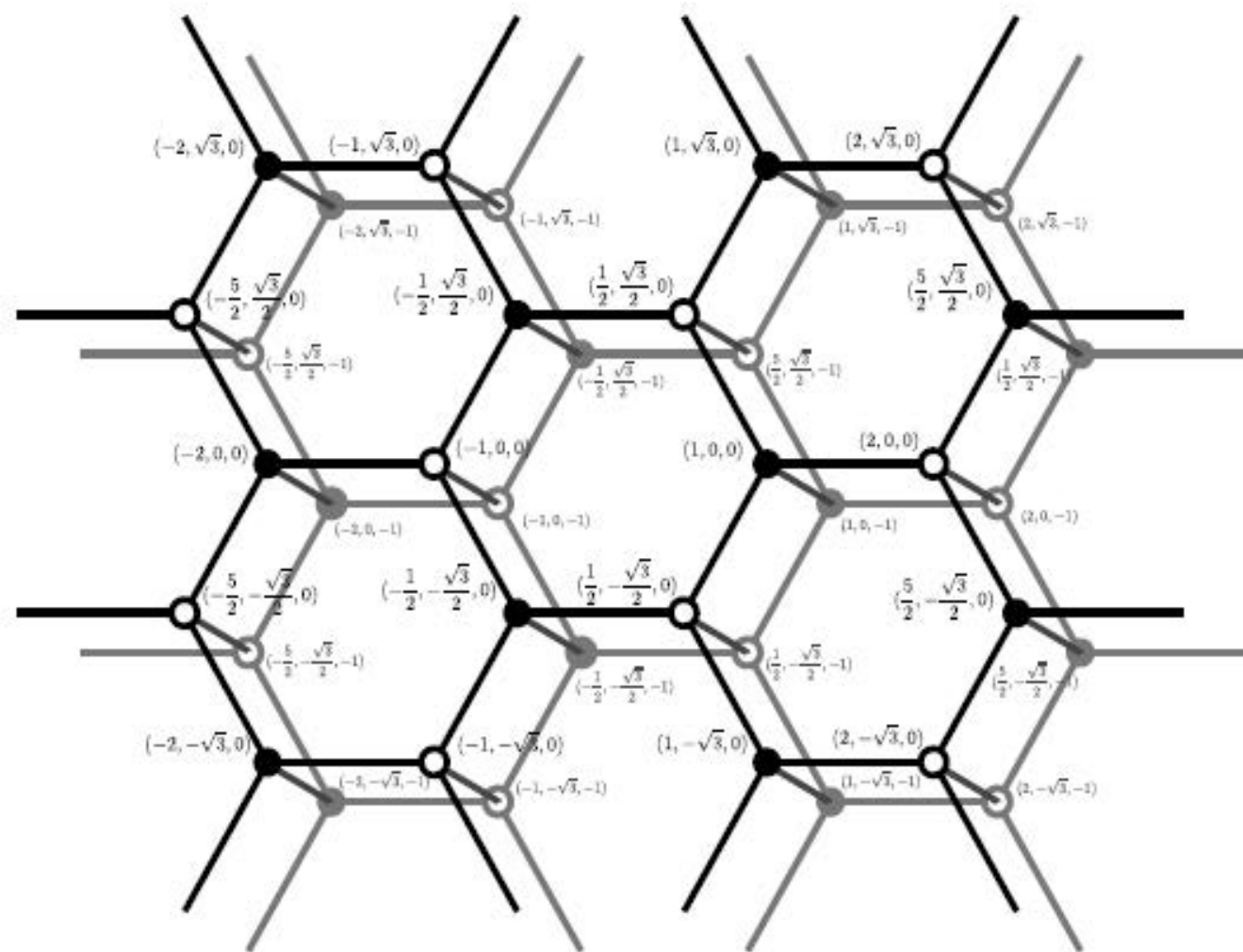


FIGURE 9. Graphite

逆問題研究推進室の 人たちは

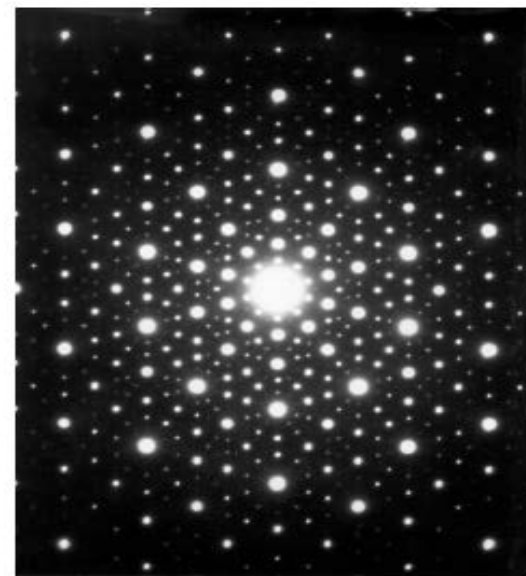
- ・ 磯崎（シュレーディンガー方程式）、千原（多様体上の偏微分方程式・幾何解析）、金子（数論）
- ・ 青嶋（統計解析）、秋山（エルゴード理論）、田崎（積分幾何）

お互いの仕事 にこんな関係 があります

- 秋山先生、金子先生の仕事は物理とこう関係します
- 秋山先生 準結晶
- 金子先生 数論 — 準結晶の背後にある力学系と関連

準結晶

1982年 Shechtman 等 [14] はマンガン・アルミニウム合金を急冷するときに、その回折像に10回対称の Bragg Peak が生ずることを示した。これは三次元結晶には不可能な回転対称性をもつ物質の内部状態を意味しており、結晶学を根本から問い直すものであった。この発見により Shechtman が2011年度のノーベル化学賞を受賞した。この発見に刺激され非周期秩序の数学が生まれた。この分野は準結晶の数理モデルと与えることを大きな動機としている。



ペンローズの タイル

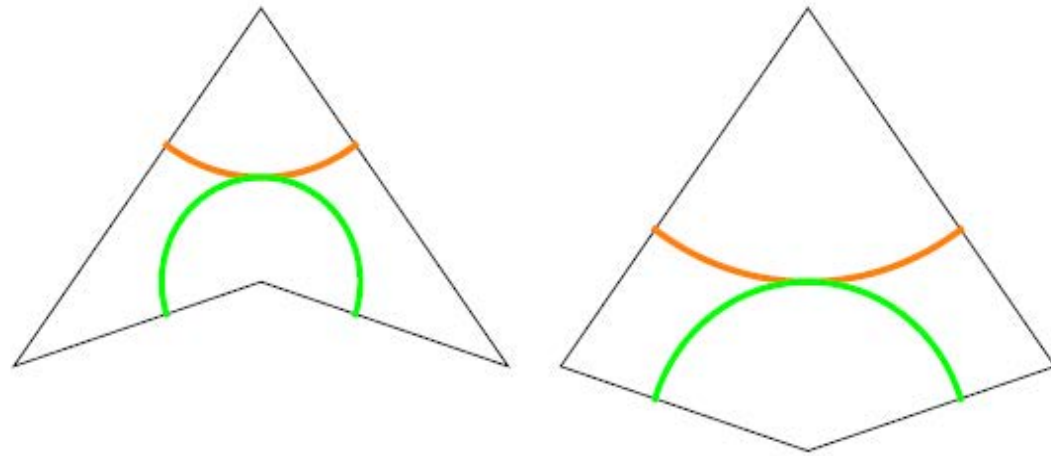


Figure 3: Penrose Tile

ペンローズタイルは貼り合わせ規則も含めて与えられる。

タイルをつな
いでいくと

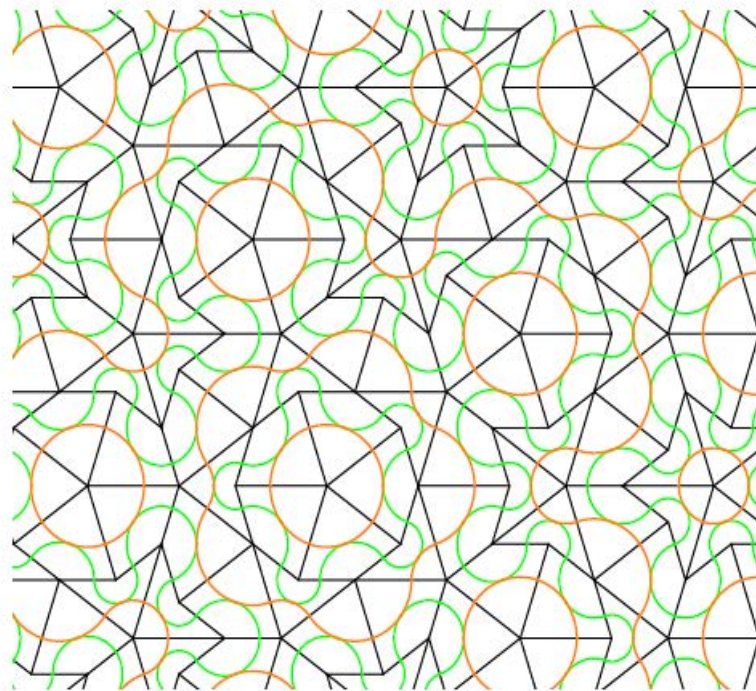


Figure 4: Penrose tiling

自己アフィンタイリングに話を限定すると、いろいろな話は簡単になる。まず M が原始的であるとき、タイルリング力学系の理論を用いて対応する Delone 集合が概周期集合かどうか判定できる。

まず対応する力学系のスペクトルが非自明の点スペクトルを含むためには Q の固有値が **Pisot 族条件**を満たすことが（ほぼ）必要十分となる。E.Bombieri-J.E.Taylor [5],

Pisot 族条件と簡単に述べると、 Q の固有値の代数的共役のうち絶対値が 1 より大きいものはすべてまた Q の固有値であることである。実は、この条件と点集合が **Meyer 集合**であることも同値となる。

青嶋先生は統計解析をやっておられるんですが

- データから元の集団を推定するのがまさに逆問題です。
- 高次元小標本統計に関する画期的な仕事で日本統計学会賞を受賞しておられます。
- ビッグデータを扱う統計理論が現在、求められています。

高次元現象を解明する統計数理モデルの創生（青嶋 誠、矢田 和彦）

1. 大規模複雑データの数理統計学を土台から構築

（データの幾何学的表現に基づく新たな漸近理論の創生）

2. 大規模複雑データの高精度可視化（次元圧縮）法を開発

（ビッグデータを含む多様な高次元データに適用できる手法の開発）

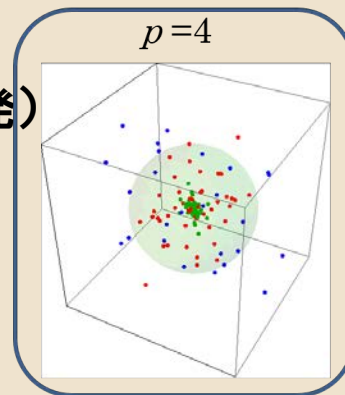
3. 大規模複雑データの統計的な信頼性保証付きモデリング

（最適性と信頼性保証の両面からモデル評価法を開発）

4. 大規模複雑データを高速に処理するソフトウェアの開発

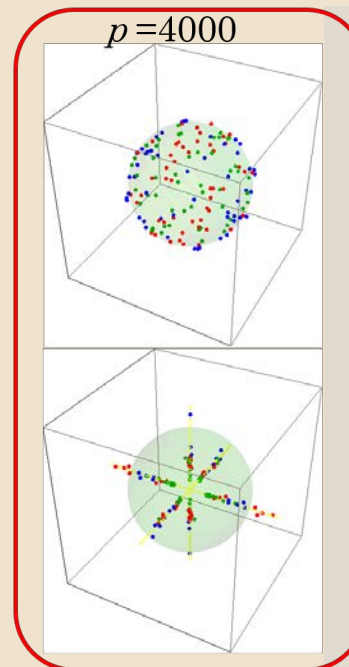
（データの可視化・モデル化・評価を高速に処理するソフトを開発）

高次元の3次元双対空間における幾何学的表現:
次元数(p)が増加すると、データ型の境界条件を境に、2つの幾何学的表現に分類される。



正規型

非正規型



5. 生命・自然・社会現象における数理モデルの導出と統計的評価

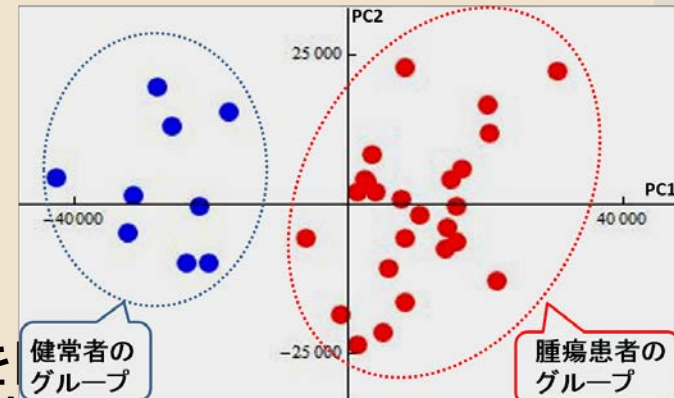
（遺伝子、医学、生体、環境、年金、金融、経済などの大規模複雑データに
潜む

潜在モデルを高速で推定し、高精度な統計的推測を実現するパッケージを提供）

世界最先端の研究を行う。国内外のトップ研究者を招聘して国際ワークショップを
討議を重ねる。本年度は、11月10日～12日に下記ワークショップを筑波大学で開催する。

（詳細サイト：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~aoshima-lab/jp/symposium.html>）

マイクロアレイデータのクラスター分析の実例



千原先生は幾何に関連した解析学です

- 渦糸に対する数学というのがあります。
- それを扱うのに好適な幾何学的背景をもった連立偏微分方程式系の理論をうちたてられました。
- もっと詳しくいえばシュレーディンガー写像等の分散型偏微分方程式系にしたがうある種の多様体の間の写像流の初期値問題です。
- フーリエ積分作用素とよばれる積分変換が、数学分野の超局所解析のみならず工学系分野である信号処理等においてもわかりやすく強力な手法になりつつあります。ユークリッド空間上でのさらなる発展やある種の非ユークリッド空間での新展開を考えています。

田崎先生は積分幾何学ですが

- ・ 現実の対象の量等を測定するときに、求めたいもののそのものを測定することは稀です。
- ・ 逆問題ではしばしば空間の中に曲線を考え、その曲線上での積分値から空間内のいろいろな量の分布を知ろうとします。
- ・ その重要な例がコンピュータ断層撮影の基礎になっているRadon 変換です。
- ・ 地震波の伝播時間から地球内部を知ろうとする travel time tomography も古典的な問題です。
- ・ このような問題で積分幾何学の考え方や手法が重要な役割を果たします。
- ・ ここで道具として幾何解析が有用なのです。

連携サロンと いうのを考えて います。

- 小さなヒントが長い間のテーマになることがあります。
- 数学とその他の二分野の講師が 30分程度話題提供を行うという合同講演会を企画しています。
- 各講演後はささやかなティーパーティーで少しゆっくり話をしたいのですが。

大学院教育にも影響あり

- 定理を生産できる大学院生を作り出すのが大学院の役割だったが、それだけでは難しい。
- 社会でそのまま使える数学はめったにない。
- むしろ、「なんとかする能力」をもった学生を作り出せるようにできないか。
- そのような学問の姿を見せられないか。

学生とともに 読みたい論文 (例えば)

- D. Mumford and J. Shah,
Optimal approximation by piecewise smooth functions
and associated variational problems,
CPAM. 42 (1989), 577-685
- E. J. Candes and T. Tao,
Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction
from highly incomplete frequency information,
IEEE Trans. Inform. Theory 52 (2006), 489-509