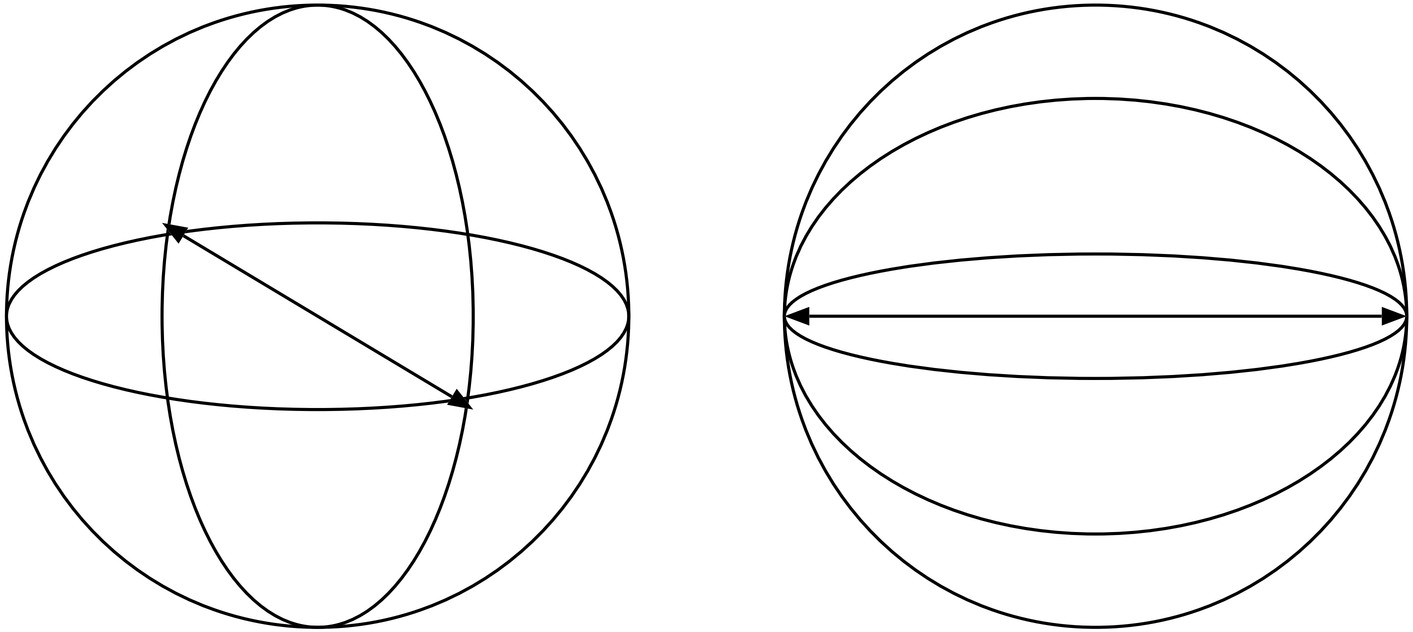
曲線の交叉と長さ

田崎博之

筑波大学数理物質系

2016 年 **1** 月 **18** 日

大円の交叉



対蹠点の対

$\boldsymbol{S^2}$ ： $\mathbf{2}$ 次元球面

$\boldsymbol{S_0, S_1}$ ： $\boldsymbol{S^2}$ の大円

$\boldsymbol{S_0 \neq S_1 \Rightarrow}$

$\boldsymbol{S_0 \cap S_1}$ ： 対蹠点の対

特に $\boldsymbol{\#(S_0 \cap S_1) = 2}$

$\boldsymbol{S_0, S_1}$ の Floer ホモロジー

$\boldsymbol{\phi : S^2}$ の面積保存変換

$\Rightarrow \#(\boldsymbol{S_0} \cap \phi \boldsymbol{S_1}) \geq \mathbf{2}$

Croftonの公式

$\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{S}^{2}$の曲線

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}) = \int \#(\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{C})\, d\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{S}^{2}$の大円全体上の積分

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}(\phi \boldsymbol{S}_1) &= \int \#(\boldsymbol{S} \cap \phi \boldsymbol{S}_1) \boldsymbol{dS} \\
&\geq \int \mathbf{2} \boldsymbol{dS} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{S}_0)
\end{aligned}
$$

計算数学で
大学入試に挑む

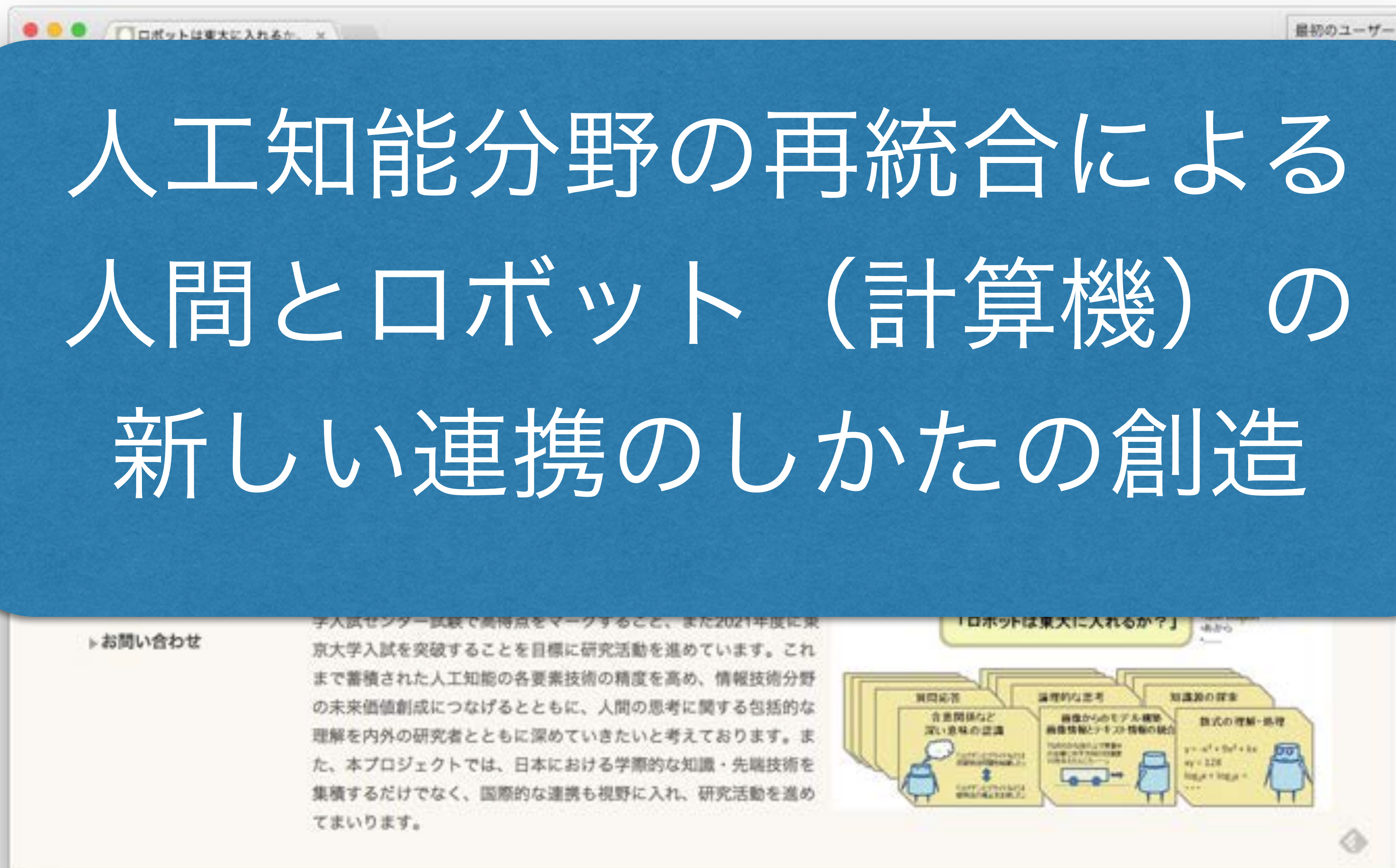
照井　章
筑波大学 数理物質系 数学域

筑波大学数理物質融合科学センター
第2回CiRfSEワークショップ
2016年1月19日

人工知能プロジェクト
「ロボットは東大に入れるか」

http://21robot.org/

人工知能プロジェクト「ロボットは東大に入れるか」

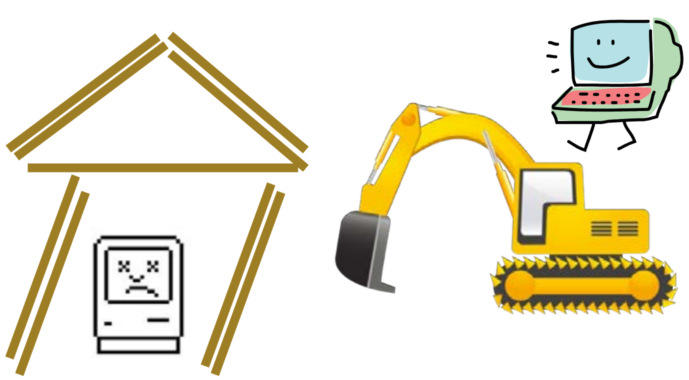


人工知能分野の再統合による
人間とロボット（計算機）の
新しい連携のしかたの創造

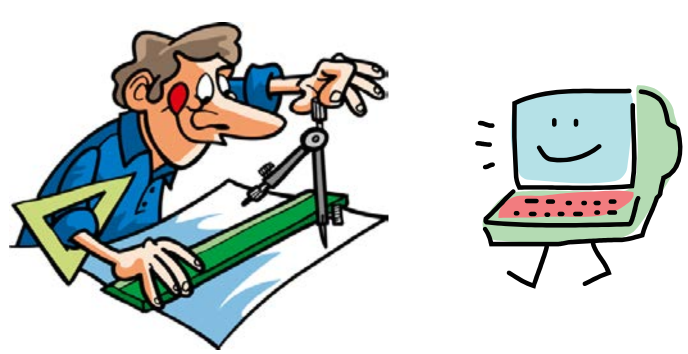
http://21robot.org/

人工知能分野の再統合による
人間とロボット（計算機）の
新しい連携のしかたの創造

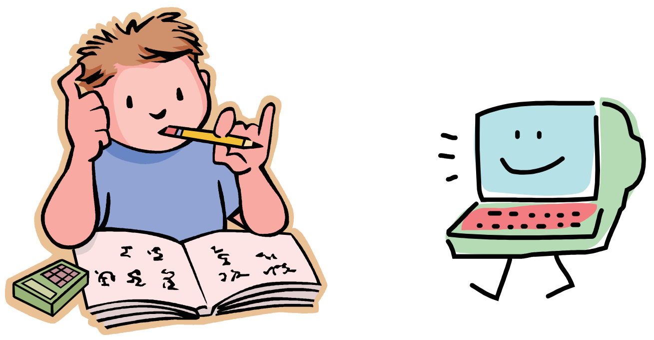
例：災害救助



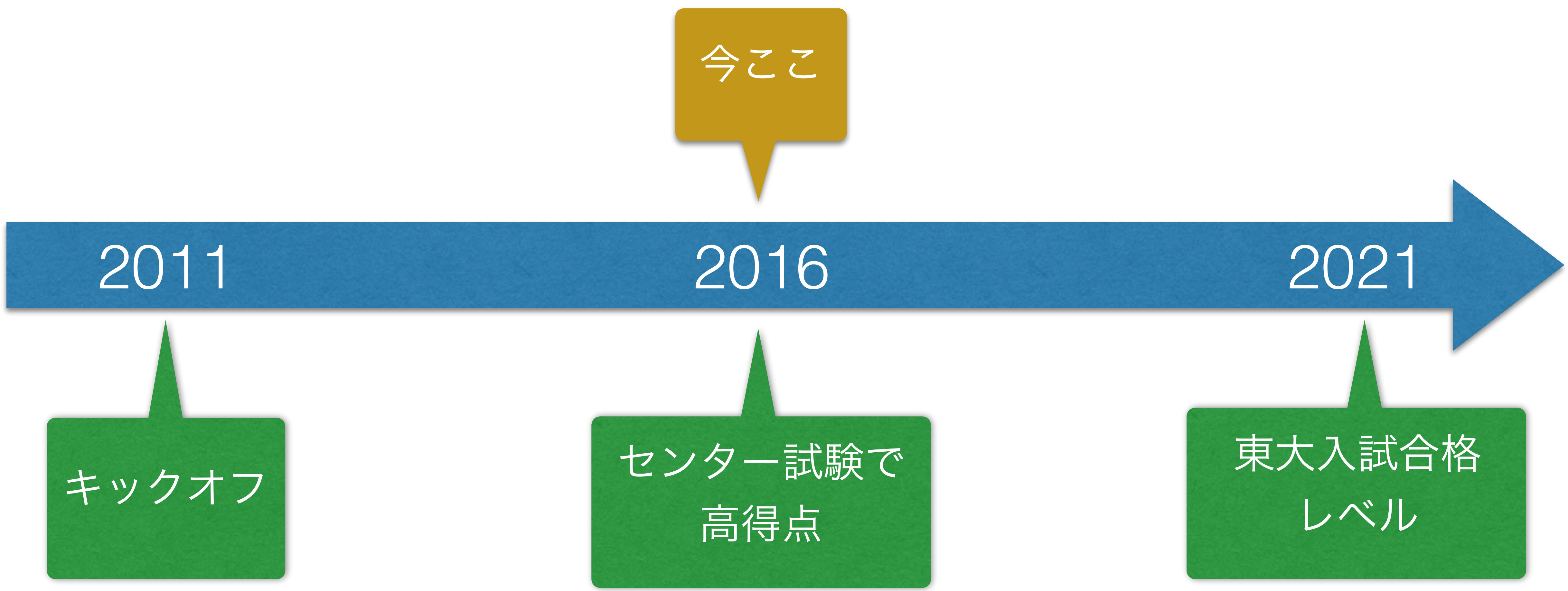
例：ものづくり支援



例：学習支援

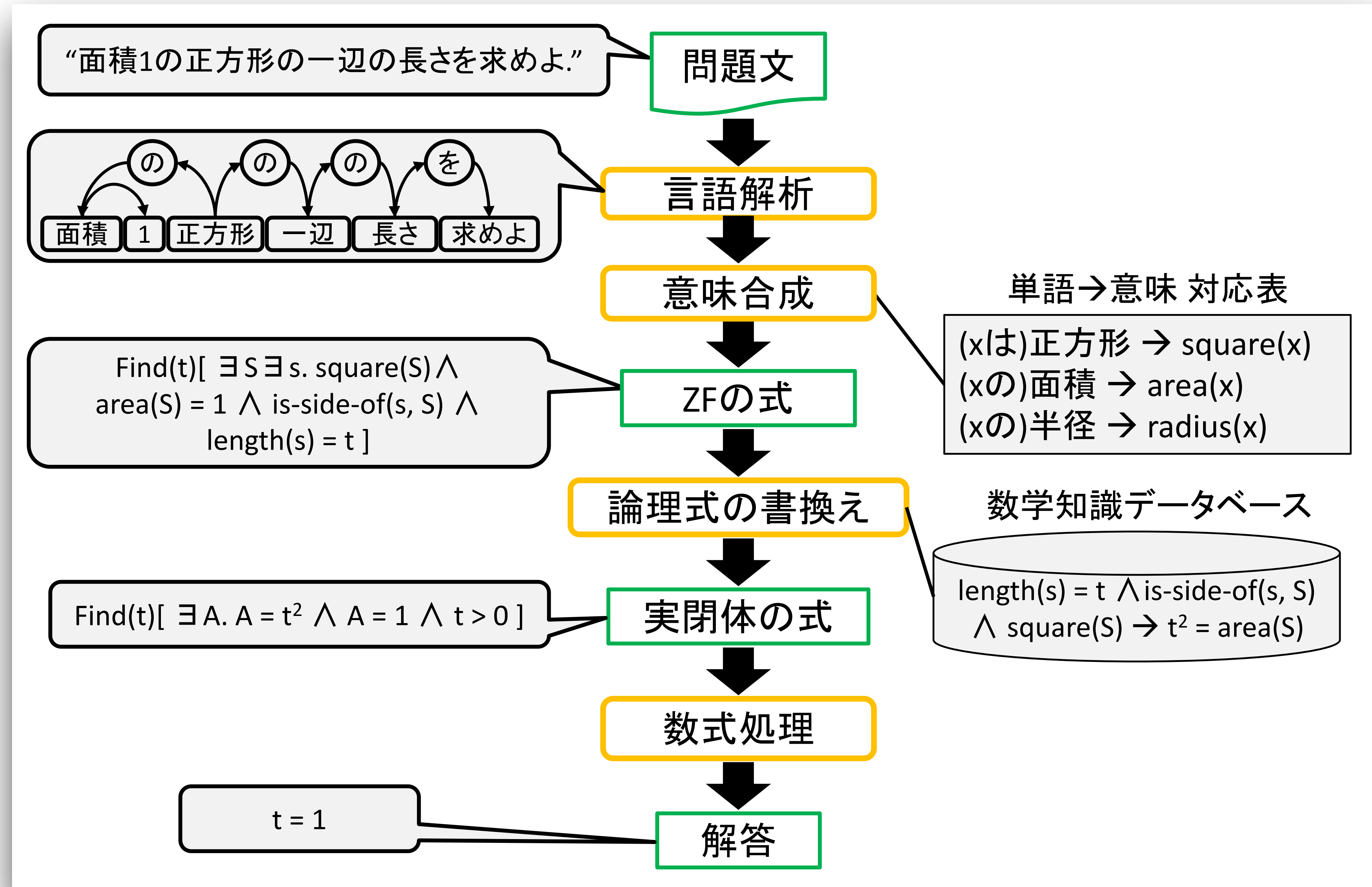


ベンチマークとして
大学入試を受験する

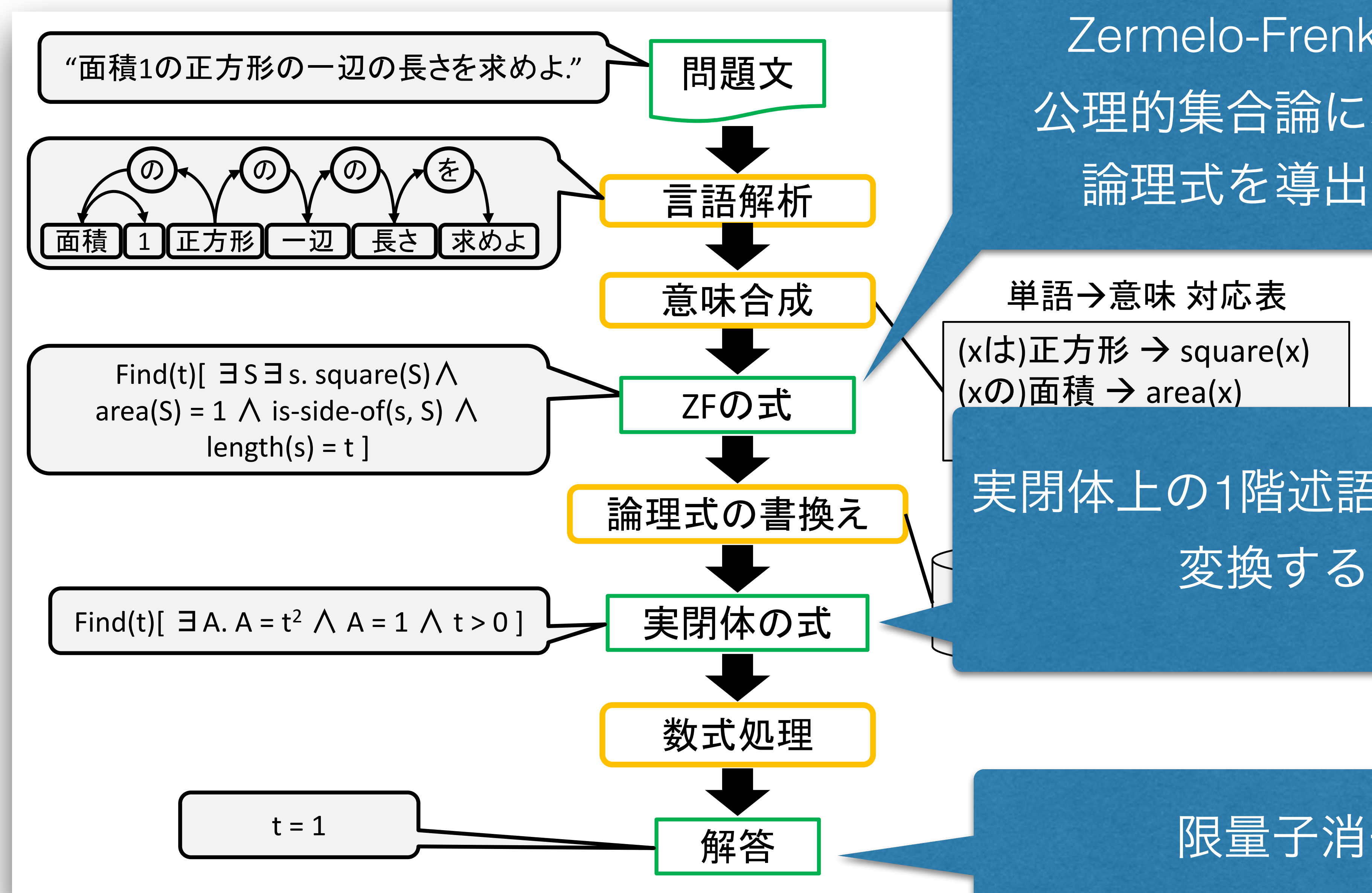


進研模試 総合学力マーク模試・6月（全5教科、英語リスニング含む）
東大入試実戦模試（駿台予備校、数学・世界史）

数学問題解答の流れ
(関数、代数、幾何の問題)



数学問題解答の流れ
（関数、代数、幾何の問題）



Zermelo-Frenkel の
公理的集合論に基づく
論理式を導出する

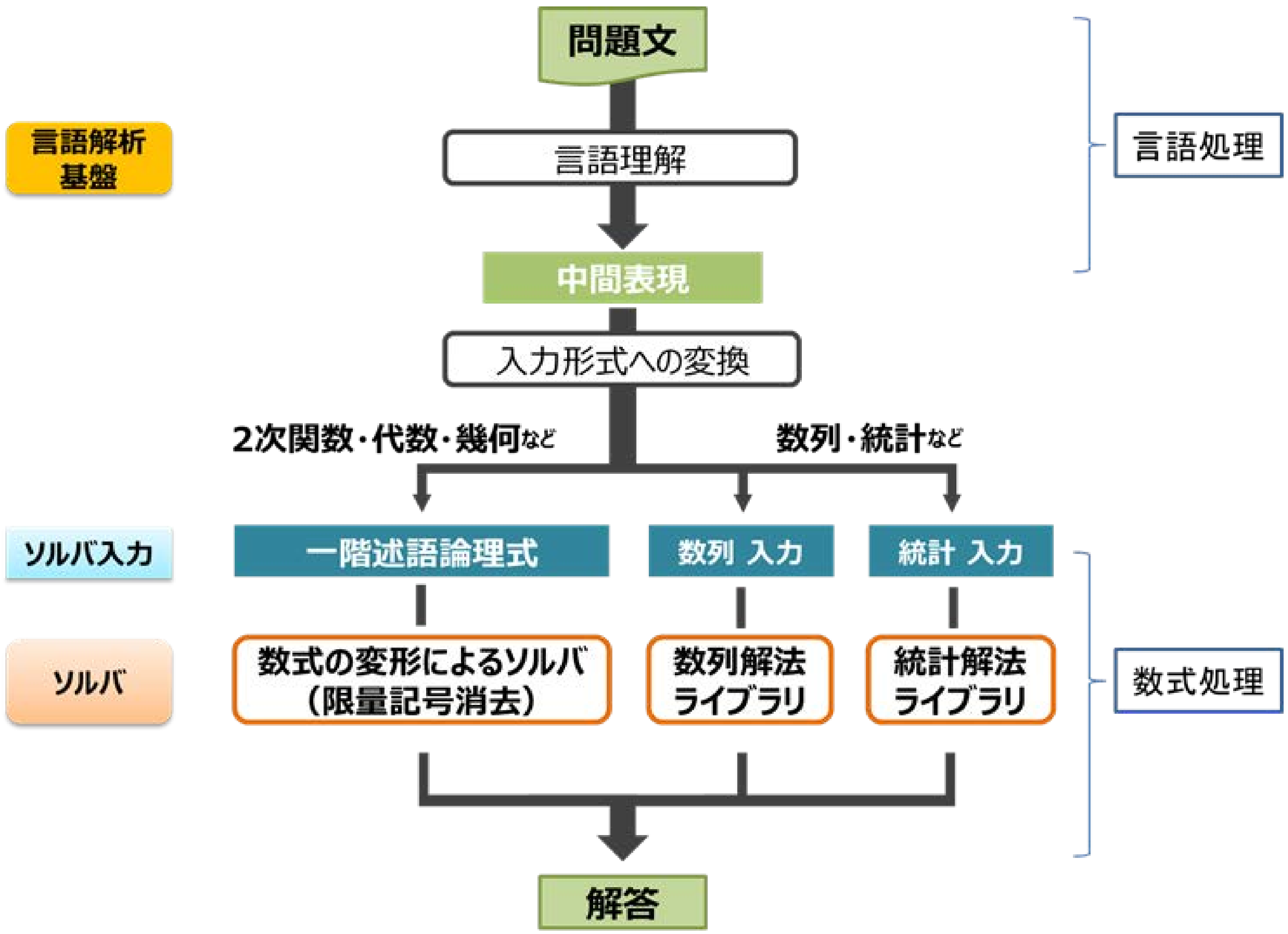
実閉体上の1階述語論理式に
変換する

限量子消去
(Quantifier Elimination)
により、限量子を消去する

筑波チームの
研究協力による
主な成果

センター試験用数列ソルバの開発

（和田，松崎 (名古屋大)）

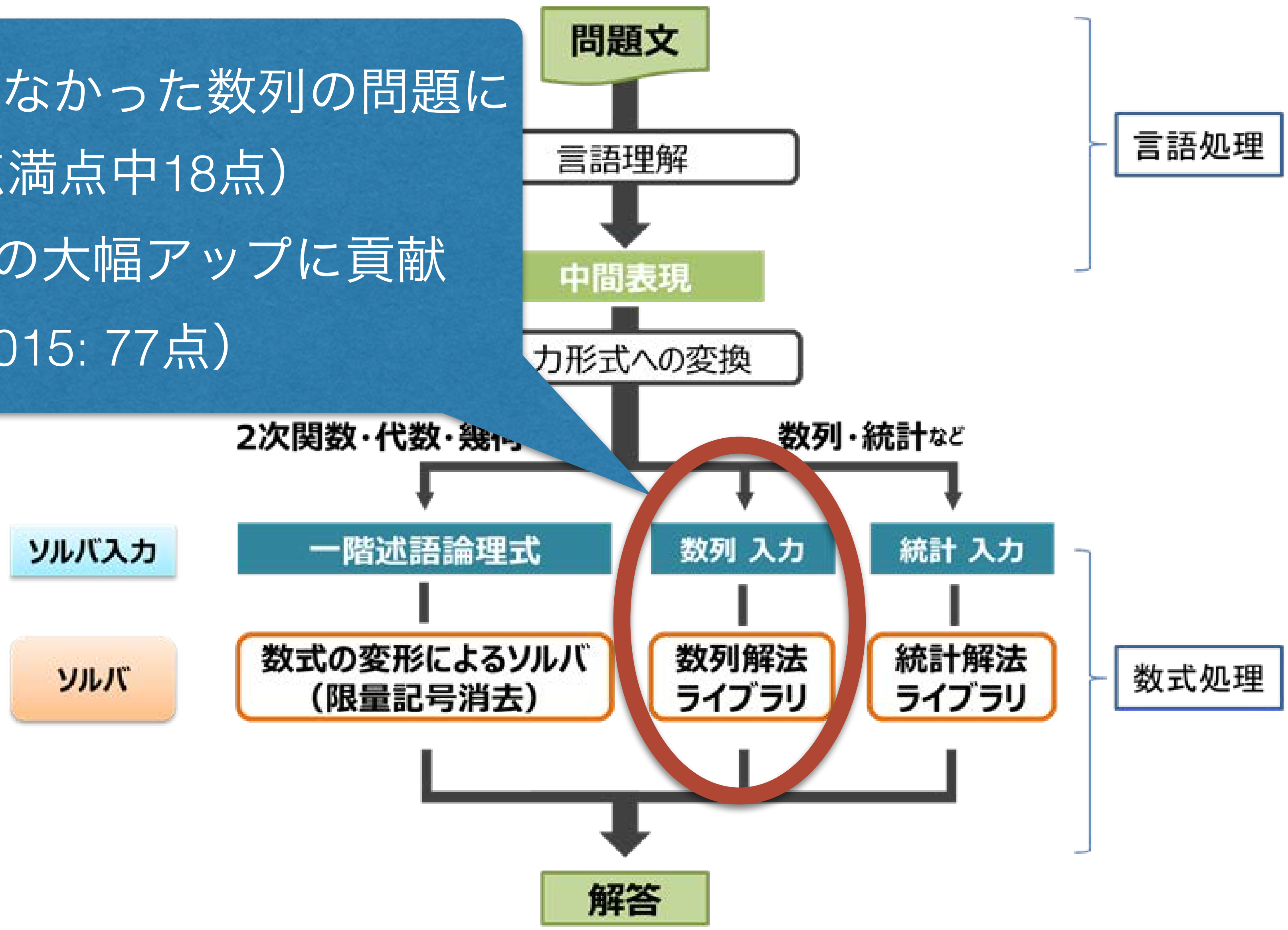


（2015年東ロボプレスリリース）

センター試験用数列ソルバの開発

（和田，松崎 (名古屋大)）

- これまで手が出なかった数列の問題にほぼ完答（20点満点中18点）
- 数学 IIB の成績の大幅アップに貢献 (2014: 55点→2015: 77点）



（2015年東ロボプレスリリース）

ヒューリスティクスによる論理式の簡単化

（國廣，岩根 (富士通研)，和田，照井）

$$\exists x_1((x_2 < 0 \vee 2x_1^2 - 2x_1 - 1 \neq 0) \wedge (x_2 < 0 \vee 2x_1^2 + 2x_1 - 1 \neq 0) \wedge (-x_1^2 - x_1 \leq 1 \vee x_1^2 - x_1 \leq -1) \wedge (-x_1^2 + x_1 \leq 1 \vee x_1^2 + x_1 \leq -1) \wedge (2x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0 \vee 2x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0) \wedge -x_1 < -2 \wedge x_1 < 4 \wedge -4x_1^2 \leq -3 \wedge x_1^2 - x_1 + 1 \neq 0 \wedge x_1^2 + x_1 + 1 \neq 0 \wedge 2x_1^4 - 13x_1^2 - 1 = 0)$$

QEの実行前に論理式を
同値でより短い式にし、
QE計算の効率化を図る

$$0 < x_1 - 2 \wedge x_1 < 4 \wedge 0 \leq 4x_1^2 - 3 \wedge 2x_1^4 - 13x_1^2 - 1 = 0 \wedge 2x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0 \wedge (x_2 < 0 \vee 2x_1^2 - 2x_1 - 1 \neq 0)$$

その他

- 幾何学的対称性を用いた論理式の簡単化（加藤，松崎 (名古屋大)）
- 機械学習を用いた「チャート式」演習問題の難易度予想（田代，松崎 (名古屋大)）
- QE計算の際に消去する変数順序を機械学習で最適化（小林）

筑波大学数理物質融合科学センター
逆問題研究推進室 (高次元データ解析グループ)

高次元現象を解明する統計数理モデルの創生

筑波大学　数学域
青嶋　誠・矢田　和善

高次元小標本データ

マイクロアレイデータ, SNP, MRIデータ, 計量化学, 画像データ, ファイナンス,

…

n 個

次元数 p ≈10,000 (遺伝子数), 標本数 n ≈100 (被験者数)

$$\text{データセット}: \mathbf{X}=[\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n],\quad \mathbf{x}_i=\underbrace{(x_{i1},\ldots,x_{ip})}_{\text{p個の成分}}{}^T$$

$p>>n$ (高次元小標本) → ~~$p<n$ (多変量解析)~~

次元の呪い

2015年の業績(発表論文)

[1] Aoshima, M., Yata, K.
Asymptotic normality for inference on multisample, high-dimensional mean vectors under mild conditions.
Methodology and Computing in Applied Probability 17, Issue 2 (2015), 419-439.

[2] Aoshima, M., Yata, K.
Geometric classifier for multiclass, high-dimensional data.
Special Issue: Celebrating Seventy Years of Charles Stein's 1945 Seminal Paper on Two-Stage Sampling,
Sequential Analysis 34, Issue 3 (2015), 279-294.

[3] Ishii, A., Yata, K., Aoshima, M.
Asymptotic properties of the first principal component and equality tests of covariance matrices in high-dimension, low-sample-size context.
Journal of Statistical Planning and Inference 170 (2016), 186-199.

2015年の業績 (講演)

[1] Aoshima, M.
High-Dimensional Quadratic Classifiers in Non-Sparse Settings.
Workshop on Statistical Methods for Large Complex Data,
National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, March 13, 2015（基調講演）.

[2] Aoshima, M.
High-Dimensional Quadratic Classifiers in Non-Sparse Settings under Heteroscedasticity.
ISNPS Meeting ``Biosciences, Medicine, and novel Non-Parametric Methods",
Graz, Austria, July 15, 2015（基調講演）.

[3] Aoshima, M.
Statistical Methods for Heterogeneous Data.
ISNPS Meeting ``Biosciences, Medicine, and novel Non-Parametric Methods",
Graz, Austria, July 15, 2015（パネリスト）.

[4] Yata, K.
PCA consistency for high-dimensional multiclass mixture models and its applications.
ISNPS Meeting ``Biosciences, Medicine, and novel Non-Parametric Methods",
Graz, Austria, July 13, 2015（招待講演）

[5] 青嶋　誠
High-dimensional quadratic classifiers in non-sparse settings.
研究集会「大規模統計モデリングと計算統計」，東京大学，2015年2月7日（招待講演）.

[6] 矢田和善，青嶋　誠
Principal component analysis based clustering for high-dimension, low-sample-size data.
第9回日本統計学会春季集会，明治大学，2015年3月8日（招待講演）.

[7] 青嶋　誠
非スパース性と高次元データの分類.
第18回情報論的学習理論ワークショップ，つくば国際会議場，2015年11月25日（招待講演）.

2015年の業績 (セミナー・研究集会)

基盤研究(A)15H01678「大規模複雑データの理論と方法論の総合的研究 (研究代表者：青嶋 誠)」によるシンポジウムを、本年度は4回開催した。ゲノムデータ・金融データ・環境データ・情報工学データについて、大規模複雑データを扱う第一線の研究者達と問題提起を行い、最新の研究動向を探った。当日は、各方面の研究成果と知見を持ち寄り、それぞれ50名～80名の参加者を交え、幅広い視点から活発な議論を行った。

[1]「生命科学データ解析の方法論と健康科学への応用」
東京大学, 2015年10月16-17日

[2]「多様な分野における統計科学の新展開」
富山県民会館, 2015年10月24-26日

[3]「大規模複雑データの理論と方法論：最前線の動向」
筑波大学, 2015年11月16-18日

[4]「統計学と機械学習における数理とモデリング」
東京工業大学, 2016年2月21-22日

基盤研究(B)22300094「高次元データの理論と方法論の総合的研究 (研究代表者：青嶋 誠)」, 挑戦的萌芽研究26540010「ビッグデータの統計学:理論の開拓と3Vへの挑戦（研究代表者：青嶋 誠）」による高次元統計解析セミナー
講演者：**J. S. Marron** (University of North Carolina at Chapel Hill)
題目：High Dimension Low Sample Size Asymptotics
日時：2015年2月20日, 世話人：青嶋 誠

2015年の主な研究業績

◆高次元判別分析における最適性指標の構築と高精度な判別法の提案

遺伝子データ等の高次元データを高精度に分類

Aoshima and Yata (2015a).
Geometric classifier for multiclass, high-dimensional data, Sequential Anal.

Aoshima and Yata (2015b).
High-dimensional quadratic classifiers in non-sparse settings, arXiv:1503.04549

◆高次元クラスター分析における幾何学的表現の導出

複雑な高次元データの可視化と幾何的な解釈

Yata and Aoshima (2015a).
Principal component analysis based clustering for high-dimension, low-sample-size data, arXiv:1503.04525

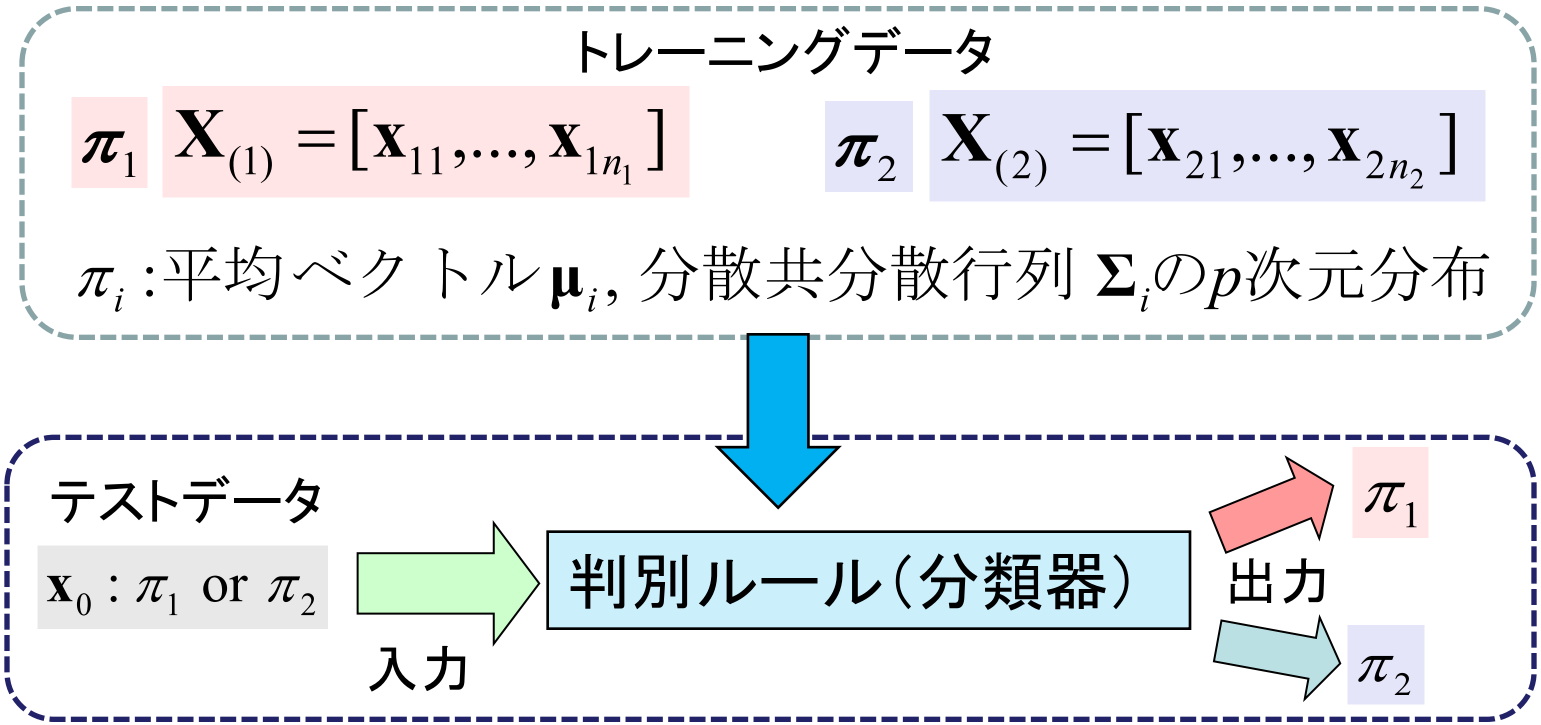
◆高次元共分散構造における推測・検定法の構築

遺伝子ネットワークを高精度に構築

Yata and Aoshima (2015b).
High-dimensional inference on covariance structures via the extended cross-data-matrix methodology, J. Multivariate. Anal., revised

Ishii, Yata and Aoshima (2016).
Asymptotic properties of the first principal component and equality tests of covariance matrices in high-dimension, low-sample-size context, J. Stat. Plan. Infer.

判別分析(教師あり学習)



高次元の判別分析

- 被験者が疾患かどうかを判別
- 疾患の種類の判別
- 画像の判別(顔認証など)
- 株価データの予測
- ネットワーク構築

提案手法によるマイクロアレイデータの分類

Golub et al. (1999)… π_1: Acute lymphoblastic leukemia (ALL)
π_2: Acute myeloid leukemia (AML)

p=7129 genes

Data set

π_1 : ALL

… …

n_1=47 samples

π_2 : AML

…

n_2=25 samples

Leave-one-out cross-validation (LOOCV)

$\log p / n_{\min} = 0.35$ or 0.37

Classifier	$W_j(\boldsymbol{I}_p)$	$W_j(\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_{jn_j})/p\}\boldsymbol{I}_p)$	$W_j(\boldsymbol{S}_{n(d)})$	$W_j(\boldsymbol{S}_{jn_j(d)})$	FS-DQDA	HM-LSVM
Error rate	3/72	6/72	11/72	1/72	0/72	2/72

Perfect classification!

2015年の主な研究業績

◆高次元判別分析における最適性指標の構築と高精度な判別法の提案

遺伝子データ等の高次元データを高精度に分類

Aoshima and Yata (2015a).
Geometric classifier for multiclass, high-dimensional data, Sequential Anal.

Aoshima and Yata (2015b).
High-dimensional quadratic classifiers in non-sparse settings, arXiv:1503.04549

◆高次元クラスター分析における幾何学的表現の導出

複雑な高次元データの可視化と幾何的な解釈

Yata and Aoshima (2015a).
Principal component analysis based clustering for high-dimension, low-sample-size data, arXiv:1503.04525

◆高次元共分散構造における推測・検定法の構築

遺伝子ネットワークを高精度に構築

Yata and Aoshima (2015b).
High-dimensional inference on covariance structures via the extended cross-data-matrix methodology, J. Multivariate. Anal., revised

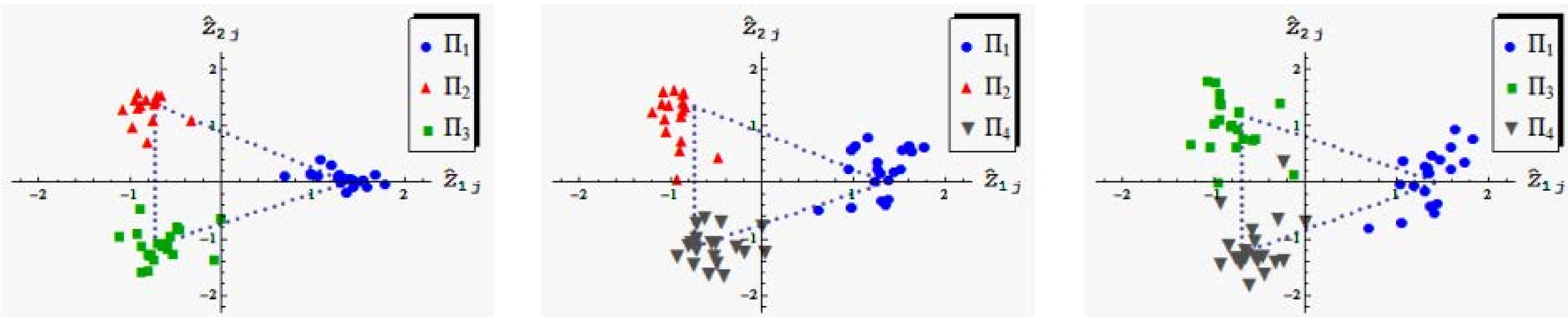
Ishii, Yata and Aoshima (2016).
Asymptotic properties of the first principal component and equality tests of covariance matrices in high-dimension, low-sample-size context, J. Stat. Plan. Infer.

遺伝子データにおける幾何学的表現の導出

Bhattacharjee et al (2001)...

p=3312, Π_1 : pulmonary carcinoids $(n_1 = 20)$ Π_2 : normal lung $(n_2 = 17)$
Π_3 : squamous cell lung carcinomas $(n_3 = 21)$ Π_4 : adenocarcinomas $(n_4 = 20)$

$k = 3$



$(a)\ \Pi_1, \Pi_2$ and Π_3 $(n = 58)$ $(b)\ \Pi_1, \Pi_2$ and Π_4 $(n = 57)$ $(c)\ \Pi_1, \Pi_3$ and Π_4 $(n = 61)$

$k = 3$

$$\frac{s_{1j}}{\sqrt{\lambda_1}} = \begin{cases} \sqrt{(1-\varepsilon_1)/\varepsilon_1} + o_P(1) & (\boldsymbol{x}_j \in \Pi_1), \\ -\sqrt{\varepsilon_1/(1-\varepsilon_1)} + o_P(1) & (\boldsymbol{x}_j \notin \Pi_1) \end{cases} \quad \text{for } j = 1,\ldots,n$$

$$\frac{s_{2j}}{\sqrt{\lambda_2}} = \begin{cases} o_p(1) & (\boldsymbol{x}_j \in \Pi_1), \\ \sqrt{\varepsilon_3/\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)} + o_P(1) & (\boldsymbol{x}_j \in \Pi_2), \\ -\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_3(1-\varepsilon_1)} + o_P(1) & (\boldsymbol{x}_j \in \Pi_3) \end{cases} \quad \text{for } j = 1,\ldots,n$$

逆問題研究推進室成果報告
代数的数のベータ展開の一様性

金子 元
筑波大学数理物質系/CiRfSE

第 2 回 CiRfSE ワークショップ

2016 年 1 月 19 日

ベータ展開について

数の 10 進法:

ベータ展開について

数の 10 進法:

$0 \leq x < 1$:   .

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \le x < 1: \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \; (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < 10).$$

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \le x < 1: \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \; (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < 10).$$

ベータ展開の定義 (A. Rényi, Acad. Sci. Hung. **8** (1957), p 477—493.)

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \le x < 1 : \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < 10).$$

ベータ展開の定義 (A. Rényi, Acad. Sci. Hung. **8** (1957), p 477ー493.)

β $(> 1) \cdots$ 固定.

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \leq x < 1: \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_n < 10).$$

ベータ展開の定義 (A. Rényi, Acad. Sci. Hung. **8** (1957), p 477—493.)

β $(> 1) \cdots$ 固定.

$$0 \leq x < 1. \ \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_n < \beta).$$

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \leq x < 1: \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_n < 10).$$

ベータ展開の定義 (A. Rényi, Acad. Sci. Hung. **8** (1957), p 477ー493.)

β $(> 1) \cdots$ 固定.

$$0 \leq x < 1. \ \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_n < \beta).$$

x_n に関するルール: 繰り上がり可能ならば繰り上がりを実行する.

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \le x < 1 : \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \; (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < 10).$$

ベータ展開の定義 (A. Rényi, Acad. Sci. Hung. **8** (1957), p 477ー493.)

$\beta \; (> 1) \cdots$ 固定.

$$0 \le x < 1. \; \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n} \; (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < \beta).$$

x_n に関するルール: 繰り上がり可能ならば繰り上がりを実行する.

例: $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$:

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \le x < 1: \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < 10).$$

ベータ展開の定義 (A. Rényi, Acad. Sci. Hung. **8** (1957), p 477ー493.)

β $(> 1) \cdots$ 固定.

$$0 \le x < 1. \ \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < \beta).$$

x_n に関するルール: 繰り上がり可能ならば繰り上がりを実行する.

例: $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: $x = \beta^{-3} + \beta^{-4}$

ベータ展開について

数の 10 進法:

$$0 \le x < 1: \quad \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < 10).$$

ベータ展開の定義 (A. Rényi, Acad. Sci. Hung. **8** (1957), p 477ー493.)

$\beta\ (> 1) \cdots$ 固定.

$$0 \le x < 1. \ \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n} \ (x_n \in \mathbb{Z}, 0 \le x_n < \beta).$$

x_n に関するルール: 繰り上がり可能ならば繰り上がりを実行する.

例: $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} : x = \beta^{-3} + \beta^{-4} = \beta^{-2}.$

数値例

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n}$. $\pi - 3$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

数値例

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n}$. $\pi - 3$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:

数値例

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n}$. $\pi - 3$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:

14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 79 . . . .

数値例

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n}$. $\pi - 3$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:
1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679 . . . .

Case 2) $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta^{-n} = \beta^{-n-1} + \beta^{-n-2}$.

数値例

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n}$. $\pi - 3$ の小数部分のベータ展開の digit である
$x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.
Case 1) $\beta = 10$:
14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 79 . . . .

Case 2) $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta^{-n} = \beta^{-n-1} + \beta^{-n-2}$.
0000101010010001010101000000101001000010010100010000010101010101000000010000101000010000101000100100100 . . . .

数値例

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n}$. $\pi - 3$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:
14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 79 . . . .

Case 2) $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta^{-n} = \beta^{-n-1} + \beta^{-n-2}$.
0000101010010001010101000000101001000001001010001000001010101010100000001000010100001000001010001001 00100 . . . .

観察

数値例

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \beta^{-n}$. $\pi - 3$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:
14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 79 . . . .

Case 2) $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta^{-n} = \beta^{-n-1} + \beta^{-n-2}$.
0000101010010001010101000000101001000010010100010000010 101010101000000010000101000010000101000100100100 . . . .

観察

ベータ展開の digit は"一様に"分布しているように見える.
※ Case 2 については, "11" が出現しないことを考慮に入れた上で, "一様性" を定義する必要がある.

代数的数のベータ展開の digit の一様性について

$\sqrt{2}-1$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1x_2\ldots$ の列を計算してみる.

代数的数のベータ展開の digit の一様性について

$\sqrt{2}-1$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:

代数的数のベータ展開の digit の一様性について

$\sqrt{2} - 1$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:

$4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727 \ldots.$

代数的数のベータ展開の digit の一様性について

$\sqrt{2}-1$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:

41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157 27 . . . .

Case 2) $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta^{-n} = \beta^{-n-1} + \beta^{-n-2}$.

代数的数のベータ展開の digit の一様性について

$\sqrt{2}-1$ の小数部分のベータ展開の digit である $x_1 x_2 \ldots$ の列を計算してみる.

Case 1) $\beta = 10$:

$4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727 \ldots.$

Case 2) $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta^{-n} = \beta^{-n-1} + \beta^{-n-2}$.

$01000001010010100100000001010000000001010101010101001000000010010100101010001001001001000010000010010 \ldots.$

研究目標

x が代数的数の場合に, ベータ展開の digit が実際に" 一様" となっていることを保証する数学の結果を与えたい.

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例:

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例:　・2 以上の整数,

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例: ・2 以上の整数, ・$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例: ・2 以上の整数, ・$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Salem 数の例:

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例:　・2 以上の整数,　・$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Salem 数の例:　・$\beta = 1.7220\ldots$: $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ の零点.

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例: ・2 以上の整数, ・$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Salem 数の例: ・$\beta = 1.7220\ldots$: $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ の零点.

定理 (K. Schmidt, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), p.269-278.)

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例: ・2 以上の整数, ・$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Salem 数の例: ・$\beta = 1.7220\ldots$: $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ の零点.

定理 (K. Schmidt, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), p.269-278.)

任意の有理数 $0 \le x < 1$ のベータ展開について,
十分大きい n に関する digit の数列 (x_n) が周期的であるとする.

考察対象のベータ

Pisot 数, Salem 数

本講演では, β が Pisot 数や Salem 数の場合を考察する.

Pisot 数の例: ・2 以上の整数, ・$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Salem 数の例: ・$\beta = 1.7220\ldots$: $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ の零点.

定理 (K. Schmidt, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), p.269-278.)

任意の有理数 $0 \leq x < 1$ のベータ展開について,
十分大きい n に関する digit の数列 (x_n) が周期的であるとする.
このとき, β は Pisot 数または Salem 数である.

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1 x_2 \dots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1,$

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1 x_2 \ldots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1$, $0 \le x < 1$: D 次の代数的無理数. 例 $\sqrt[D]{2}$.

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1x_2\ldots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1$, $0 \le x < 1$: D 次の代数的無理数. 例 $\sqrt[D]{2}$.
$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \ne 0\}$.

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1 x_2 \ldots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1,\ 0 \le x < 1$: D 次の代数的無理数. 例 $\sqrt[D]{2}$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \ne 0\}$.

例 $x = 0.\underbrace{4103201}_{7}\ldots$ (10 進法).

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1 x_2 \ldots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1$, $0 \le x < 1$: D 次の代数的無理数. 例 $\sqrt[D]{2}$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \neq 0\}$.

例 $x = 0.\underbrace{4103201}_{7}\ldots$ (10 進法). $\lambda(7) = \lambda(10, x; 7) = 5$.

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1 x_2 \ldots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1$, $0 \le x < 1$: D 次の代数的無理数. 例 $\sqrt[D]{2}$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \neq 0\}$.

例 $x = 0.\underbrace{4103201}_{7}\ldots$ (10 進法). $\lambda(7) = \lambda(10, x; 7) = 5$.

予想: $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N} = \frac{\beta - 1}{\beta} > 0$.

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1 x_2 \ldots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1$, $0 \le x < 1$: D 次の代数的無理数. 例 $\sqrt[D]{2}$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \ne 0\}$.

例 $x = 0.\underbrace{4103201}_{7}\ldots$ (10 進法). $\lambda(7) = \lambda(10, x; 7) = 5$.

予想: $$\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N} = \frac{\beta - 1}{\beta} > 0.$$

定理

先行研究 (β が整数の場合, $x = (x_1 x_2 \dots)_\beta$)

$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 1$, $0 \le x < 1$: D 次の代数的無理数. 例 $\sqrt[D]{2}$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \neq 0\}$.

例 $x = 0.\underbrace{4103201}_{7}\dots$ (10 進法). $\lambda(7) = \lambda(10, x; 7) = 5$.

予想: $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N} = \frac{\beta - 1}{\beta} > 0$.

定理

$(\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg N^{1/D}$.

$\beta = 2$: D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall and C. Pomerance, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), p.487-518.
一般の整数 β: B. Adamczewski and C. Faverjon, C. R. Acad. Sci. Paris, **350** (2012), 1-4. Y. Bugeaud, Cambridge Tracts in Math. **193**, Cambridge, (2012) Theorem 8.5 (p.176).

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \le x < 1$. $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$.

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \leq x < 1$. $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$. x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \leq x < 1$. $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$. x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

例 $x = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ (βは"平方数ではない") : $\beta x^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 2$.

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \leq x < 1.$ $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}.$ x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

例 $x = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ (βは" 平方数ではない") : $\beta x^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 2.$

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq N,\ x_n \neq 0\}.$

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \le x < 1$. $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$. x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

例 $x = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ (βは"平方数ではない") : $\beta x^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 2$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \ne 0\}$.

仮定: 無限に多くの n に対して, $x_n \ne 0$.

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \leq x < 1$. $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$. x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

例 $x = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ (βは"平方数ではない") : $\beta x^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 2$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq N,\ x_n \neq 0\}$.

仮定: 無限に多くの n に対して, $x_n \neq 0$.

予想

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \leq x < 1$. $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$. x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

例 $x = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ (βは"平方数ではない") : $\beta x^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 2$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq N,\ x_n \neq 0\}$.

仮定: 無限に多くの n に対して, $x_n \neq 0$.

予想

以上の条件のもとで, $\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N}$ が存在し, 正の値を取る .

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \le x < 1$. $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$. x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

例 $x = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ (βは"平方数ではない") : $\beta x^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 2$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le N,\ x_n \ne 0\}$.
仮定: 無限に多くの n に対して, $x_n \ne 0$.

予想

以上の条件のもとで, $\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N}$ が存在し, 正の値を取る .

定理 (Y. Bugeaud, Integers 9 (2009), p.215-226.)

先行研究: (β が Pisot 数または Salem 数の場合)

$\beta > 1$: Pisot 数または Salem 数

$0 \leq x < 1$. $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta^{-n}$. x は β を用いた (既約)D 次方程式の根.

例 $x = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ (βは"平方数ではない") : $\beta x^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 2$.

$\lambda(N)(= \lambda(\beta, x; N)) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq N,\ x_n \neq 0\}$.

仮定: 無限に多くの n に対して, $x_n \neq 0$.

予想

以上の条件のもとで, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N}$ が存在し, 正の値を取る .

定理 (Y. Bugeaud, Integers 9 (2009), p.215-226.)

$\Rightarrow (\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg (\log N)^{3/2} (\log\log N)^{-1/2}$.

主結果

x は β を用いた (既約)D 次方程式の根. 予想: $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda(N)}{N} > 0.$

定理 (Y. Bugeaud, Integers **9** (2009), p.215-226.)

$(\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg (\log N)^{3/2}(\log\log N)^{-1/2}.$

主結果

x は β を用いた (既約)D 次方程式の根. 予想: $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N} > 0.$

定理 (Y. Bugeaud, Integers **9** (2009), p.215-226.)

$(\forall N \gg 1) \ \ \lambda(N) \gg (\log N)^{3/2}(\log\log N)^{-1/2}.$

定理 (K. Ergod. Theory and Dynamical Syst. **35** (2015), p.1243-1262.)

主結果

x は β を用いた (既約)D 次方程式の根. 予想: $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda(N)}{N}>0.$

定理 (Y. Bugeaud, Integers **9** (2009), p.215-226.)

$(\forall N\gg 1)\ \ \lambda(N)\gg(\log N)^{3/2}(\log\log N)^{-1/2}.$

定理 (K. Ergod. Theory and Dynamical Syst. **35** (2015), p.1243-1262.)

$(\forall N\gg 1)\ \ \lambda(N)\gg N^{1/(2D-1)}(\log N)^{-1/(2D-1)}.$

主結果

x は β を用いた (既約)D 次方程式の根. 予想: $\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda(N)}{N} > 0.$

定理 (Y. Bugeaud, Integers **9** (2009), p.215-226.)

$(\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg (\log N)^{3/2}(\log\log N)^{-1/2}.$

定理 (K. Ergod. Theory and Dynamical Syst. **35** (2015), p.1243-1262.)

$(\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg N^{1/(2D-1)}(\log N)^{-1/(2D-1)}.$

定理 (K. to appear in Rend. Sem. Math. Univ. Padova.)

主結果

x は β を用いた (既約)D 次方程式の根. 予想: $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda(N)}{N} > 0.$

定理 (Y. Bugeaud, Integers **9** (2009), p.215-226.)

$(\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg (\log N)^{3/2}(\log\log N)^{-1/2}.$

定理 (K. Ergod. Theory and Dynamical Syst. **35** (2015), p.1243-1262.)

$(\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg N^{1/(2D-1)}(\log N)^{-1/(2D-1)}.$

定理 (K. to appear in Rend. Sem. Math. Univ. Padova.)

$(\forall N \gg 1)\ \ \lambda(N) \gg N^{1/D}(\log N)^{-1/D}.$