# 代数学の話題と研究の可能性

Shigeki Akiyama (秋山茂樹)

24 Jan 2017

- 金子元助教（Borel 予想と一様分布）
  $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ の10進小数表示は乱数？
  たとえば 0 でない数はどの程度でてくる？

- 佐垣大輔准教授：表現論と組み合わせ論
  行列式とは何者か？それ以外に良い不変式は存在するか？
  群の対称性を記述する直交多項式。

- 秋山茂樹：準周期系と数論
  準結晶の簡単な構成
  結晶の成長速度、結晶の形を決定するモデル

## Discrepancy

$[0,1]$ の n 個の点集合 $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ の Discrepancy を

$$D_n^* = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{\#\{A\cap[0,x]\}}{n} - x \right|$$

と定義する。二次元なら

$$D_n^* = \sup_{x,y\in[0,1]} \left| \frac{\#\{A\cap([0,x]\times[0,y])\}}{n} - xy \right|$$

とする。一般の次元でも同様に定義できる。

## 数列の Discrepancy

実数列 $\omega = (x_n)$ にたいして n 番目までの小数部分をとってDiscrepancy $D_n^*(\omega)$ とおく。$\lim_n D_n^*(\omega) = 0$ が成り立つとき数列 $\omega$ は一様分布するという。

したがって Discrepancy は一様分布へ近づくスピードを評価する量である。数列と点集合での Discrepancy の違いは後から重要となる。

## Roth の定理

ある正数 $C$ があって $d$ 次元の任意の数列に対して、

$$D_n^*(\omega) \geq C\frac{\log^{d/2} n}{n}$$

となる $n$ が無限に存在する。

## Schmidt の定理

ある正数 $C$ があって1 次元の任意の数列に対して

$$D_n^*(\omega) \geq C\frac{\log n}{n}$$

となる $n$ が無限に存在する。

## 数値積分

リーマン積分

$$\int_0^1 f(x)dx$$

は　$0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = 1$ という分割に対して

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

という近似を考え、分割を細かくしていった極限として定義

される。等分点をとると

$$\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

のような和となる。

## 問題点

- 高次元化したときの計算コストが高い。$m^d$ 個の点を用いても誤差は $O(1/m^2)$。(次元の呪い)
- より精密に計算したいとき、以前の計算結果は役に立たない。(ダイナミック計算でない。)

## モンテカルロ法

$(w_i)$ を乱数列とすると

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)$$

によって積分が計算できる。この方法は高次元化も容易であり前述の二つの問題点は解決する。この改良版は現在も様々なところで利用されている。収束の速度は確率的に $O(1/\sqrt{n})$ である。(大数の法則)

## 問題点

- $O(1/\sqrt{n})$ なので収束が遅い。
- 厳密な誤差評価ができない。
- 計算の正しさが確率的にしか保証されない。

## Koksma-Hlawka の不等式

実数列$(x_n)$ について

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right| \le D_n^*(x_n)\mathrm{Var}(f)$$

が成り立つ。 $Var$ は $f$ の全変動である。特に一様分布する場合には数値積分の方法を与えていると考えることができる。高次元でも同様の不等式が存在する。

## 準モンテカルロ法

Koksma-Halwka の不等式により、Discrepancy が低い列を用いるとモンテカルロ法よりも高速に収束する。誤差が厳密に評価される。

$D_n^*(\omega) = O(\frac{\log^d n}{n})$ の成り立つ数列を Low discrepancy sequence という。

## Van der Corput 列

一次元の Low discrepancy 列として著名な列。二進法で自然数を表示し、その逆読みを行って構成する。

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 \to .0 \\
1 &= 1 \to .1 \\
2 &= 10 \to .01 \\
3 &= 11 \to .11
\end{aligned}
$$

とすると

$$D_n^*(\omega) \le C\frac{\log n}{n}$$

という最良の形の評価ができる。(Schmidt の定理参照）定数の大きさも含め、これよりも Discrepancy の低い 1 次元の数列は知られていない。

## Van der Corput-Halton 列

互いに異なる素数を用いて高次元化すると Low discrepancy 列が得られる。Van der Corput 列は２進法で構成したので $(\phi_2(n))$ とかけば、

$$(\phi_2(n), \phi_3(n), \phi_5(n)) \in [0,1)^3$$

のように小さい素数を順に用いて高次元の数列をつくる。この方法で

$$D_n^*(\omega) \leq C_d \frac{\log^d n}{n}$$

　という形の評価ができる。定数を除いてこの評価が最良の形かどうかは$d \geq 2$ では歴史的未解決問題。

## 問題点

残念ながら係数が大きい！

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\log C_d}{d \log d} = 1$$

なので $C_d$ は $d$ が大きくなると $d^d$ のように非常に早く発散する。

## Niederreiter の $(t, s)$ 列

Niederreiter はこの問題を $(t, m, s)$-net と $(t, s)$ 列という概念を導入して克服した。すなわち

$$D_n^*(\omega) \leq C_d \frac{\log^d n}{n}$$

かつ $C_d$ が急速に減少する列を代数的（有限体上の形式冪級数をうまく選ぶ方法）に構成した。

この列を具体的に求める計算は高次元になると大変となる。

$(t, m, s)$-net と $(t, s)$列は、現在も様々な数学の分野と関連して発展している。

- 代数系（群、環、体、代数）
- 力学系（Perron-Frobenius 作用素）
- 幾何学的 Ramsey 理論