

非可換空間上のDIFFEOMORPHISMと その近似的不変量

伊敷 吾郎

- G. I-Matsumoto(DIAS) arXiv: 1904.00308

研究の内容

- ◆ 非可換空間：座標や関数が互いに非可換であるような空間 $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta$
- ◆ 超弦理論ではこのような空間が自然と現れる

e.g. 行列模型

$$S = \frac{1}{g^2} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} D X_\mu^2 + \frac{1}{4} [X^\mu, X^\nu]^2 + \text{fermions} \right)$$

座標 $\Leftrightarrow$ $N \times N$ 行列

- ◆ 一方、重力の理論ではDiffeomorphismが重要
- ◆ 非可換空間の上でDiffeomorphismは定義できるか？その不変量はあるか？

(Area-preserving diffeoについては先行研究で理解されていた)

研究成果

- ◆ Berezin-Toeplitz量子化と呼ばれる方法を用いて、非可換空間における Diffemorphismを定義した。
- ◆ そのDiffeoの変換の下での近似的不変量を構成した。

近似的不変量：

Area-preserving diffeoの下でexactに不変

$$I(X + \delta X) = I(X)$$

一般のdiffeoの下では

$$I(X + \delta X) = I(X) + \mathcal{O}(1/N)$$

目次

1. Introduction
2. Berezin-Toeplitz量子化
3. 行列のDiffeomorphisms
4. 近似的不変量
5. まとめ

Berezin-Toeplitz 量子化

非可換化 $\Leftrightarrow$ 量子化

平面

非可換平面

$$(p, q) \in R^2 \quad \{p, q\} = 1$$



$$(\hat{p}, \hat{q}) \quad [\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$$

$$f(p, q) \in C^\infty(R^2)$$

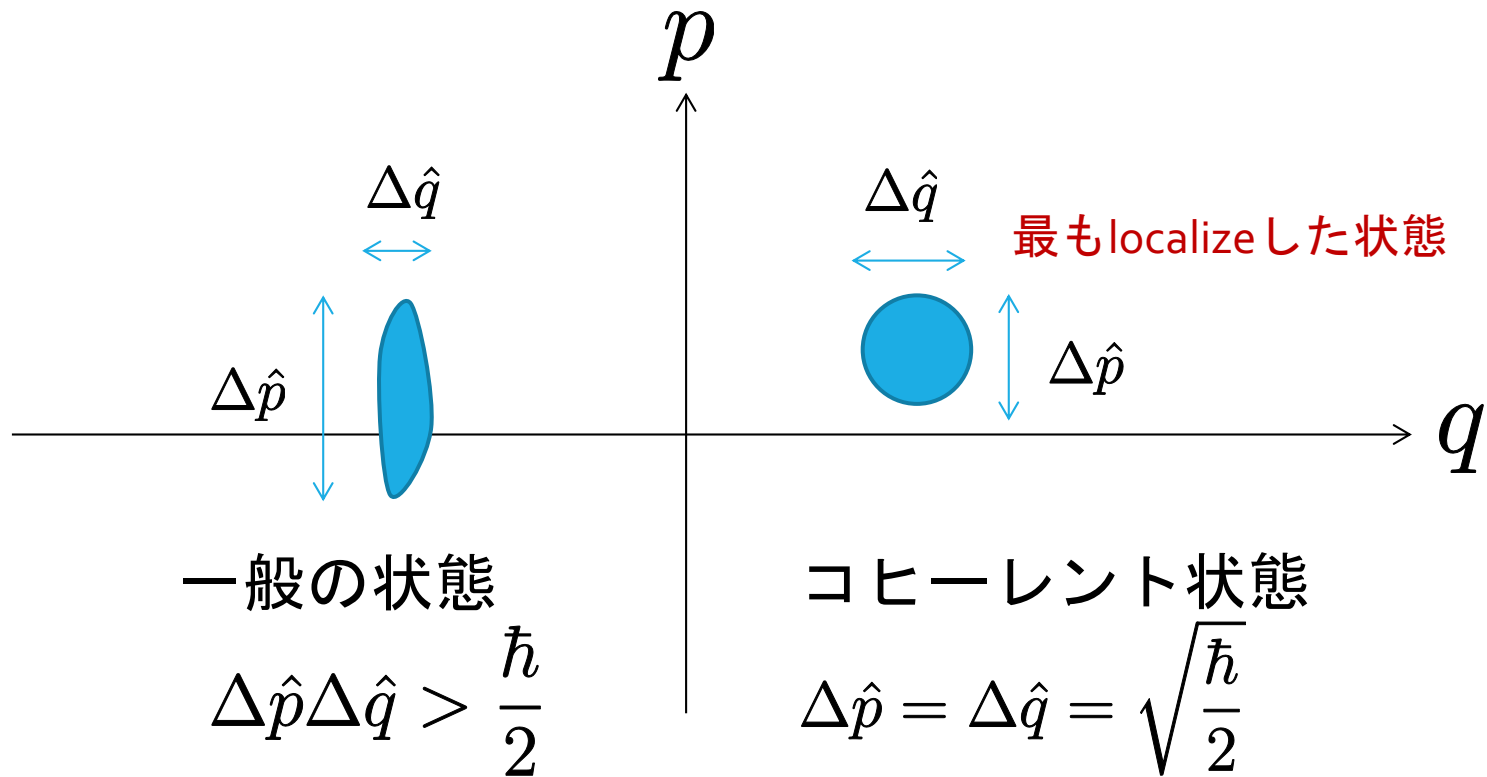


$$f(\hat{p}, \hat{q}) \quad (\text{順序の不定性あり})$$

これは古典力学の量子化と同じ！

コヒーレント状態を用いた量子化

- ◆ コヒーレント状態 $|p, q\rangle$ (annihilation operatorの固有状態)
- ◆ $|p, q\rangle$ は最小の波束を持つ



- ◆ 量子化の写像 $\hat{\mathcal{O}} = \int dp dq \mathcal{O}(p, q) |p, q\rangle \langle p, q|$ (Anti-normal ordering)

スピノルを使った(再)定式化

◆ コヒーレント状態は、 R^2 上のDirac zero modeとして実現される。

$$\mathcal{D} = \Gamma^a (\partial_a + A_a) \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial p} \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$A = \frac{i}{2\hbar} (pdq - qdp) : \text{一様磁場を与えるゲージ場}$$

・ ゼロモード ($\mathcal{D}\psi = 0$) の正規直交基底

$$\psi_n = \begin{pmatrix} \langle n|p, q\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle : \text{任意の正規直行基底}$$

◆ Toeplitz演算子

$$\hat{O}_{nn'} = \int \psi_{n'}^\dagger \mathcal{O} \psi_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{先ほどの量子化と等価} \\ \longleftrightarrow \hat{O} = \int dpdq \mathcal{O}(p, q) |p, q\rangle \langle p, q| \end{array} \right)$$

◆ コヒーレント状態を用いた量子化 = スピノルのゼロモードによる量子化

◆ スピノルを用いた方法は、より一般の多様体の場合に拡張できる

Berezin-Toeplitz量子化

- ・ コンパクトなspin-C リーマン多様体 $(\mathcal{M}, g)$
- ・ ゲージ群 $\mathcal{G}$ 、ゲージ場 A
- ・ $\mathcal{M}$ 上のスピノルで、 $\mathcal{G}$ のある表現 $\mathcal{R}$ に属するものを考える
- ・ 内積 $(\psi, \psi') = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{g} \psi^\dagger \cdot \psi'$
- ・ Dirac演算子 $\mathcal{D} = \Gamma^a e_a^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha + A_\alpha)$ $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\delta^{ab}$
 - Metricから決まる
Tetradとspin接続
 - 表現 $\mathcal{R}$ の空間に作用
- ・ ゼロモードの数を $\dim \text{Ker} \mathcal{D} = N$ と置く
- ・ $\{\psi_i | i = 1, 2, \dots, N\}$: ゼロモードの正規直行基底 $\begin{cases} (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} \\ \mathcal{D} \psi_i = 0 \end{cases}$

Toeplitz演算子

: 関数 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ の作用を、ゼロモードの上に制限したもの

$$f\psi_i = \sum_j \hat{f}_{ij}\psi_j + \cdots \quad \longrightarrow \quad \hat{f}_{ij} = (\psi_j, f\psi_i)$$

zero modes nonzero modes

この関係は、関数から行列への写像を与えている: $T_N : f \rightarrow \hat{f}$

- ◆ この演算子の構成には、(計量・ゲージ場・スピノル)が必要
- ◆ ゼロモードの数を大きくするためには、ゲージ場がトポロジカルに非自明な配位を取る必要がある (モノポール・インスタントン etc)

◆ ケーラー多様体の場合に、以下のように幾何構造を選ぶ

$G = U(1)$, $F = \text{symplectic form}$, $g = \text{compatible metric of } F$

スピノル : ChargeがNのもの $\left[\mathcal{D} = \sigma^a e_a^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha + N A_\alpha) \right]$

するとToeplitz演算子は以下の性質を満たす(以下は2次元の場合)。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} \|T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)\| = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \|iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f, g\})\| = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} T_N(f) = \int f \end{array} \right.$$

量子化の(曲がった空間への)
一般化になっている

・ [Bordemann-Meinrenken-Shlichenmaier, Ma-Marinescu]

例 1 : S^2

◆ $ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} \quad \omega = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} \quad (\text{stereographic coordinate})$

◆ ゲージ群 = $U(1)$, $A = \frac{1}{2} \frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1 + |z|^2} \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int F = 1 \quad \text{Wu-Yangモノポール} \right)$

◆ charge N のスピノルを考える

Dirac演算子: $\mathcal{D} = \sigma^a e_a^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha + N A_\alpha)$

Index定理 $\Rightarrow \dim \text{Ker} \mathcal{D} = N$

◆ ゼロモードの基底

$$\psi_r = \left(\frac{(2J)!}{(J-r)!(J+r)!} \right)^{1/2} \frac{z^{J-r}}{(1+|z|^2)^J} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \int d^2 z \sqrt{g} \psi_r^\dagger \psi_{r'} = \delta_{rr'} \\ \mathcal{D} \psi_r = 0 \end{array} \right.$$

$$J = (N-1)/2, \quad r = -J, -J+1, \dots, J$$

◆ Toeplitz演算子 $\hat{f}_{rr'} = \int d^2 z \sqrt{g} \psi_{r'}^\dagger f \psi_r$

単位球面の埋め込み関数 $\begin{cases} x^1 = \sin \theta \cos \phi \\ x^2 = \sin \theta \sin \phi \\ x^3 = \cos \theta \end{cases} \quad \left(z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \right)$

に対してはToeplitz演算子は以下で与えられる

$$\hat{x}^\mu = \frac{1}{J+1} L^\mu \quad L^\mu : \text{SU(2)生成子のN次元既約表現行列}$$

$$[L^\mu, L^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\rho} L^\rho$$

Fuzzy sphere [Madore]

Fuzzy sphere

$$\hat{x}^\mu = \frac{1}{J+1} L^\mu$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^3 (\hat{x}^\mu)^2 = \frac{1}{(J+1)^2} \sum_{\mu=1}^3 (L^\mu)^2 = \frac{J(J+1)}{(J+1)^2} \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathcal{O}(1/N) \\ [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \frac{i}{J+1} \epsilon^{\mu\nu\rho} \hat{x}_\rho \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{array} \right. \quad (2J+1 = N)$$

球面を非可換に拡張したようなものになっている

BT量子化を使えば、より一般の非可換空間に対しても
座標（埋込関数）に対応する行列の配位を得ることができる。

行列のDiffeomorphism

Diffeomorphisms

- ◆ Diffeoは滑らかな1:1写像 $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ である
- ◆ $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ の場合のdiffeo不変量が重要（一般相対論など）
- ◆ Diffeoは $\mathcal{M}$ 上の関数の変換を誘導する

$$\text{For } \sigma \rightarrow \sigma'(\sigma), \quad f(\sigma) \rightarrow f'(\sigma) := f \circ \sigma'(\sigma) = f(\sigma'(\sigma))$$

$$C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$$

- ◆ Diffeo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ はより一般に、 $\mathcal{M}$ 上のテンソル場の変換を引き起こす

幾何構造を不変に保つDiffeo

- Isometry : 計量を不変に保つ
- Symplectomorphism : シンプレクティック形式を不変に保つ
- Volume(Area)-preserving diffeo : volume (area) form を不変に保つ
- Holomorphic diffeo : 複素構造を不変に保つ

行列のDiffeo

- ◆ Berezin-Toeplitz 量子化を使えば、以下のように行列がDiffeoの下でどのように変換するのを読み取ることができる。

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathcal{M}) \ni f & \xrightarrow{\text{BTQ}} & \hat{f} \\ \text{Diffeo} \downarrow & & \downarrow \text{行列の Diffeo} \\ C^\infty(\mathcal{M}) \ni f' & \xrightarrow{\text{BTQ}} & \hat{f}' \end{array}$$

例: Diffeomorphisms for fuzzy S^2

- ◆ S^2 という単純な空間でも一般のdiffeoは無限個あって手におえないので、簡単のためholomorphicなdiffeoだけに注目する
- ◆ S^2 上のholomorphic diffeoは $SL(2, C)/Z_2$ と同型であることが知られている。

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{with} \quad a, b, c, d \in C, \quad ad - bc = 1$$

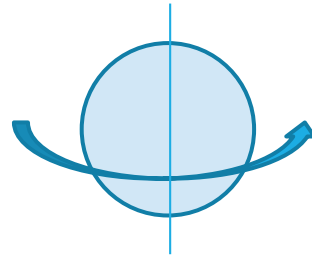
- ◆ 以下の4つの変換によって生成される

▪ rotation	$z \rightarrow e^{i\theta} z$	← APD & Isometry
▪ dilatation	$z \rightarrow e^t z$	} APDでもisometryでもない
▪ translation	$z \rightarrow z + p$	
▪ sp. conf.	$z \rightarrow \frac{z}{qz + 1}$	

$(\theta, t \in R, \quad p, q \in C)$

例 1 : Rotation on S^2

$$z' = e^{i\theta} z$$



Rotation on the 1-2 plane

$$\hat{x}_{ij}^{\mu'} = \int d^2 z \sqrt{g} \psi_j^\dagger x^{\mu'} \psi_i = \int d^2 z \sqrt{g} \psi_j^\dagger(z) x^\mu(z'(z)) \psi_i(z)$$

$$\longrightarrow \hat{x}'^\mu = U^\dagger \hat{x}^\mu U$$

$$U = e^{i\theta \hat{x}^3}$$

Area preserving diffeo $\Leftrightarrow$ Unitary 相似変換
(よく知られた結果)

例 2 : Dilatation on S^2

◆ For the dilatation $z \rightarrow e^t z$, we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{x}'^3)_{rr'} = \frac{\delta_{rr'}}{J+1} [(J+1)F(J+r+2, 0, 2J+3; 1-e^{-2t}) - (J-r+1)F(J+r+1, 1, 2J+3; 1-e^{-2t})] \\ (\hat{x}'^{\pm})_{rr'} = \frac{\delta_{rr' \pm 1} e^{-t}}{J+1} [\sqrt{(J \pm r+1)(J \pm r)} F(J+r+2, 1, 2J+3; 1-e^{-2t})] \end{array} \right.$$

F: Gauss's hyper geometric function

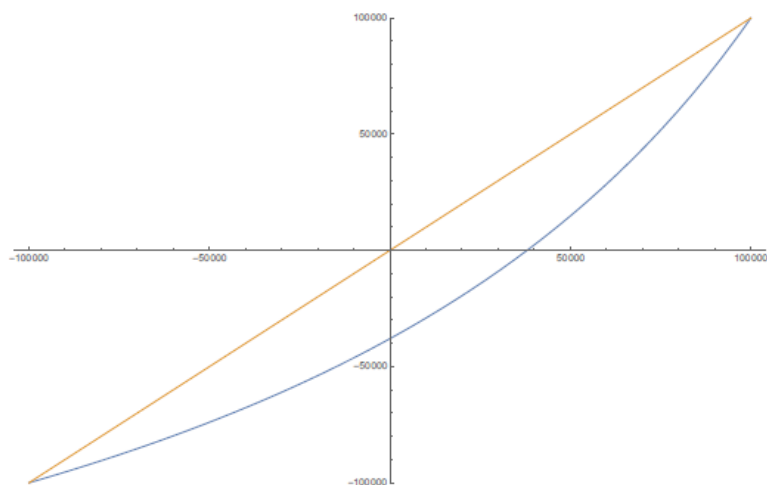
$$\begin{aligned} (\hat{x}'^\mu \hat{x}'^\mu)_{rr} = & \frac{1}{(J+1)^2} [(J+1)F(J+r+2, 0, 2J+3 : 1-e^{-2t}) \\ & - (J-r+1)F(J+r+1, 1, 2J+3 : 1-e^{-2t})]^2 \\ & + \frac{e^{-2t}}{2(J+1)} [(J+r+1)(J-r)F(J+r+3, 1, 2J+3 : 1-e^{-2t})^2 \\ & + (J+r)(J-r+1)F(J+r+2, 1, 2J+3 : 1-e^{-2t})^2] \end{aligned}$$

◆ They look very complicated. But all eigenvalues of $\hat{x}'^\mu \hat{x}'^\mu$ are nearly equal to 1 .

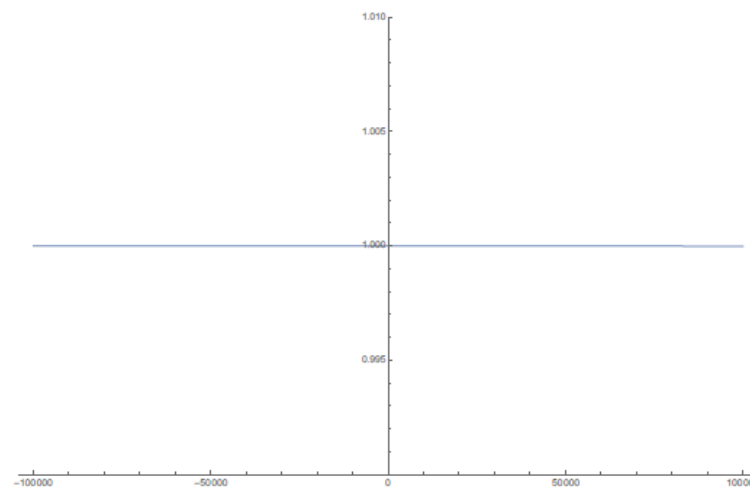
Plots for Eigenvalues

Orange : $t=0$ (original fuzzy S_2)

Blue : $t=0.4$



Eigenvalues of $\hat{x}^3$



Eigenvalues of $\sum_i \hat{x}^i \hat{x}^i$

固有値の集合はdiffeoによって変形される（相似変換では書けない）が、固有値がtarget空間の単位球面上に分布するという性質は保っている

近似的不变量

情報計量による構成

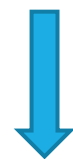
埋め込み関数

$$x^\mu : \mathcal{M} \rightarrow R^d$$

BT量子化



$$X^\mu = T_N(x^\mu)$$



情報計量

$$g_{ab}(X, \sigma) = \text{Tr} \partial_a \rho \partial_b \rho$$

$$\rho = |X, \sigma\rangle \langle X, \sigma|$$



$\sum_\mu (\Delta X^\mu)^2$ を最小化するような
"coherent state" を定義 $|X, \sigma\rangle \quad \sigma \in \mathcal{M}$

◆ 行列のDiffeo $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ の下で、情報計量は以下のように振る舞う

$$\delta g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a + \mathcal{O}(1/N)$$

◆ 従って以下は近似的不変量を与える。

$$I_0(X) = \int \sqrt{g}, \quad I_1(X) = \int \sqrt{g} R, \dots$$

まとめ

- ◆ Berezin-Toeplitz 量子化 : 関数 $\Rightarrow$ 行列
- ◆ BT量子化を用いて、“行列のdiffeomorphism”を定義した
- ◆ 3種類の近似的不変量を提案 (Eo, 情報計量, Heat kernel)
これらはそれぞれ異なるメトリックに対応する