行列正則化と その一般化について

2020/11/30　伊敷 吾郎

足立宏幸氏（筑波大）菅野聡氏（筑波大）斎藤海秀（神戸大）松本高興氏（DIAS）らとの共同研究

目次

正則化とは？

連続無限のラベル

- 場の理論の力学変数（場）の自由度は無限大　$\varphi(x)$
- その結果、計算のいたるところに発散が生じる
- 発散をくりこむためにはまず（UVの）自由度を有限にして、発散を抑える必要がある

⇒　これを正則化という

- 正則化の例

・運動量にUVカットオフを導入
・Pauli-Villars正則化
・次元正則化
・格子正則化

運動量のカットオフ

■例として球面上の2次元場の理論を考える　$\varphi(\theta,\phi)=\varphi(\Omega)$

$$\varphi(\Omega)=\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{m=-J}^{J}\varphi_{Jm}Y_{Jm}(\Omega) \longleftarrow$$ 球面調和関数

$$Y_{Jm}=\sum_{l=0}^{J}\sum_{\{i_k\}}c^{lm}_{i_1i_2\cdots i_l}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_l}$$

$$\left(\begin{aligned} x_1 &= \sin\theta\cos\phi \\ x_2 &= \sin\theta\sin\phi \\ x_3 &= \cos\theta \end{aligned} \qquad \sum_{i=1}^{3}x_i^2=1\right)$$

角運動量にUVカットオフを導入してみる

$$\boxed{J=0,1,2,\cdots,\infty \Longrightarrow J=0,1,2,\cdots,\Lambda} \qquad \varphi(\Omega)=\sum_{J=0}^{\Lambda}\sum_{m=-J}^{J}\varphi_{Jm}Y_{Jm}(\Omega)$$

これによりUVの自由度がなくなり、正則化されたことになる

運動量カットオフの弱点

- カットオフされた場たちは、閉じた代数をなさない

場の積 $\varphi_1(\Omega)\varphi_2(\Omega)$ はカットオフを超えたモードも含んでしまう

$$[\Lambda]\otimes[\Lambda]=0\oplus 1\oplus\cdots\oplus[2\Lambda] \longleftarrow \text{元のカットオフを超える}$$

- 多くの理論で、この性質が対称性を壊してしまう

例えばゲージ理論

$$F_{\mu\nu}=\underbrace{\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu}_{\text{カットオフされている}}-i\underbrace{[A_\mu,A_\nu]}_{\text{カットオフを超えている}}$$

⟹ $F_{\mu\nu}$ のゲージ共変性が失われる

- 時空の対称性や超対称性なども同様の理由で壊される ⟹ 対称性を保つ正則化が必要

行列正則化

- 行列正則化：関数を有限サイズの行列にmapする

$$Y_{Jm} = \sum_{l=0}^{J} c^{lm}_{i_1 i_2 \cdots i_l} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l} \quad \xrightarrow[\text{map}]{} \quad \hat{Y}_{Jm} = \sum_{l=0}^{J} c^{lm}_{i_1 i_2 \cdots i_l} \hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \cdots \hat{x}_{i_l}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_i = \dfrac{2}{\sqrt{N^2-1}} \hat{L}_i \\ \hat{L}_i : SU(2) \text{ 生成子の } N \text{ 次元表現行列} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{L}_k \text{ を満たす} \\ N \times N \text{ サイズの行列} \end{array} \right)$$

- このmapは空間の「非可換化」に相当

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \frac{2i}{\sqrt{N^2-1}} \epsilon_{ijk} \hat{x}_k \neq 0$$

座標同士は一般に非可換（$N \to \infty$で可換（可換極限））

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \hat{x}_i = \frac{4}{N^2-1} \sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i \hat{L}_i = \mathbf{1_N}$$

非可換球面

- $\{\hat{Y}_{Jm} | J = 0, \cdots, N-1\}$ は $N \times N$ 行列の基底をなす

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{N} \mathrm{Tr} \hat{Y}^{\dagger}_{J_1 m_1} \hat{Y}_{J_2 m_2} = \delta_{J_1 J_2} \delta_{m_1 m_2} \\ \\ \#\{\hat{Y}_{Jm} | J = 0, \cdots, N-1\} = \sum_{J=0}^{N-1} \sum_{m=-J}^{J} = N^2 \end{array} \right)$$

任意の $N \times N$行列は $\{\hat{Y}_{Jm} | J = 0, \cdots, N-1\}$で展開できる

$$\hat{\varphi} = \sum_{J=0}^{N-1} \sum_{m=-J}^{J} \varphi_{Jm} \hat{Y}_{Jm}$$

行列サイズが角運動量カットオフに対応

- 行列正則化の利点：カットオフを導入しても代数は閉じている

$$\hat{\varphi}_1 \in M_N(C),\ \hat{\varphi}_2 \in M_N(C) \to \hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2 \in M_N(C)$$

- $\hat{Y}_{Jm}$ は関数の２つの代数構造（通常の積・ポアソン括弧積）を近似したものになっている：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&Y_{J_1 m_1}(\Omega) Y_{J_2 m_2}(\Omega) = \sum_{J_3=0}^{\infty} \sum_{m_3=-J_3}^{J_3} \tilde{C}^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} Y_{J_3 m_3}(\Omega) \\
&\{Y_{J_1 m_1}(\Omega), Y_{J_2 m_2}(\Omega)\} = \sum_{J_3=0}^{\infty} \sum_{m_3=-J_3}^{J_3} \tilde{D}^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} Y_{J_3 m_3}(\Omega)
\end{aligned}
\right.
\qquad \{f, g\} := \frac{1}{\sin\theta}(\partial_\theta f \partial_\phi g - \partial_\phi f \partial_\theta g)
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\hat{Y}_{J_1 m_1} \hat{Y}_{J_2 m_2} = \sum_{J_3=0}^{N-1} \sum_{m_3=-J_3}^{J_3} C^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} \hat{Y}_{J_3 m_3} \\
&iN[\hat{Y}_{J_1 m_1}, \hat{Y}_{J_2 m_2}] = \sum_{J_3=0}^{N-1} \sum_{m_3=-J_3}^{J_3} D^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} \hat{Y}_{J_3 m_3}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\boxed{\lim_{N\to\infty} C^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} = \tilde{C}^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} \qquad \lim_{N\to\infty} D^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} = \tilde{D}^{J_3 m_3}_{J_1 m_1 J_2 m_2} \quad \text{が成立}}
$$

「関数の積 ⇔ 行列積、ポアソン括弧 ⇔ 交換子」で近似される

■ $\hat{Y}_{Jm}$ のトレースは球面調和関数の積分に対応

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\hat{Y}_{Jm}=\int d\Omega Y_{Jm}(\Omega)$$

■ 球面上のスカラー場理論の行列正則化

$$S=\int d\Omega\left(\frac{1}{2}\nabla^{\mu}\varphi(\Omega)\nabla_{\mu}\varphi(\Omega)-\frac{m^2}{2}\varphi(\Omega)^2-\frac{g}{4}\varphi(\Omega)^4\right)$$

$$=\int d\Omega\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\{x_i,\varphi(\Omega)\}^2-\frac{m^2}{2}\varphi(\Omega)^2-\frac{g}{4}\varphi(\Omega)^4\right)$$

$$\varphi(\Omega)=\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{m=-J}^{J}\varphi_{Jm}Y_{Jm}(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$S'=\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(-\frac{N^2}{2}\sum_{i=1}^{3}[\hat{x}_i,\hat{\varphi}]^2-\frac{m^2}{2}\hat{\varphi}^2-\frac{g}{4}\hat{\varphi}^4\right)$$

$$\hat{\varphi}:=\sum_{J=0}^{N-1}\sum_{m=-J}^{J}\varphi_{Jm}\hat{Y}_{Jm}$$

正則化された模型

■ カットオフが有限の理論は非可換空間上の場の理論とも解釈できる（非可換性～1/N）

行列正則化（一般論）

- $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) において、線形写像 $T_N : C^\infty(M) \to M_N(C)$ で以下の性質を満たすものを行列正則化と呼ぶ

$$\lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$$

関数の積 ⇔ 行列積

$$\lim_{N\to\infty} \left| iN^{1/n}[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f,g\}) \right| = 0$$

ポアソン括弧 ⇔ 交換子

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr} T_N(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \frac{\omega^n}{n!} f$$

積分 ⇔ トレース

- 行列正則化は対称性と相性が良く、超弦理論にも適用されている（行列模型）

- 行列正則化は、Berezin-Toeplitz量子化と呼ばれる方法により一般的に構成できる

BEREZIN-TOEPLITZ量子化

- 簡単のため2次元の場合（リーマン面）を考える。体積を $\frac{1}{2\pi}\int \omega = 1$ とする

  $g(u,v) = \omega(Ju, v)$ により計量が定まる（J は複素構造）

  $\omega = dA$　　A : シンプレクティックポテンシャル

- ディラック演算子を導入

  $D = i\gamma^{\mu}(\nabla_{\mu} - iNA_{\mu})$　　N : 作用するスピノルのチャージに対応

  D の独立なゼロモードは丁度 N 個あることが分かる（消滅定理＋指数定理より）

- ゼロモードへの射影演算子を導入

  Π_N :　スピノル全体（無限次元）$\rightarrow$　ゼロモード（N 次元）

■ Toeplitz演算子

まず関数をスピノルに作用する演算子とみなす： $\begin{pmatrix} f \in C^\infty(M) \\ \psi：\text{スピノル} \end{pmatrix}$

$$\psi \to f\psi$$

それをゼロモード上に制限したものをTeoplitz演算子という：

$$T_N(f) := \Pi_N f \Pi_N$$

ゼロモードは N 次元ベクトル空間をなすので、$T_N : C^\infty(M) \to M_N(C)$ と見なせる

■ Toeplitz演算子は行列正則化を与える。つまり、以下を満たす [Bordemann-Meinrenken-Schlichenmaier]

$$\lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$$

関数の積 ⇔ 行列積

$$\lim_{N\to\infty} |iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f,g\})| = 0$$

ポアソン括弧 ⇔ 交換子

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f$$

積分 ⇔ トレース

本研究の結果

・これまでに行列正則化の2種類の一般化を考えた

関数（電荷をもたないスカラー場）

行列正則化

有限サイズの行列

① 電荷をもつスカラー場
② テンソル場

？？？（本研究）

この発表では①について紹介する

電荷をもつスカラー場の行列正則化

- 電荷をもつ複素スカラー場

ゲージ変換：
$$\begin{cases} \varphi(\sigma)' = e^{iQ\alpha(\sigma)}\varphi(\sigma) \\ A_\mu(\sigma)' = A_\mu(\sigma) + \partial_\mu\alpha(\sigma) \end{cases}$$

共変微分： $D_\mu\varphi(\sigma) = (\nabla_\mu - iQA_\mu(\sigma))\varphi(\sigma)$ 　　Q：電荷（Dirac量子化条件より整数）

$$(D_\mu\varphi(\sigma))' = e^{iQ\alpha(\sigma)}D_\mu\varphi(\sigma)$$

- Toeplitz演算子の定義を修正する必要がある

φ は電荷 N のスピノルを電荷 $N+Q$ のスピノルに移す演算子

$$\psi^{(N)} \to \varphi^{(Q)}\psi^{(N)}$$

電荷 N 　　電荷 $N+Q$

■ 電荷をもつスカラー場のToeplitz演算子

$$T_{N+Q,N}(\varphi) := \Pi_{N+Q}\varphi^{(Q)}\Pi_N$$

$(N+Q)\times N$ の長方形行列で与えられる

■ これは以下のような性質を満たす

電荷ゼロの場（関数）　電荷 Q の場　電荷 Q

場の積 ⇔ 行列積　[Hawkins 1999]

（Ｉ）
$$\lim_{N\to\infty} |\underline{T_{N+Q}(f)}\,\underline{T_{N+Q,N}(\varphi)} - \underline{T_{N+Q,N}(f\varphi)}| = 0$$

$(N+Q)\times(N+Q)$　$(N+Q)\times N$　$(N+Q)\times N$

ポアソン括弧⇔交換子の一般化

（II）
$$\lim_{N\to\infty} |iN(T_{N+Q}(f)T_{N+Q,N}(\varphi) - T_{N+Q,N}(\varphi)T_N(f)) - T_N(\{f,\varphi\})| = 0$$

$\{f,\varphi\} := W^{\mu\nu}\partial_\mu f D_\nu\varphi$ はポアソン括弧を共変にしたもの

正則化されたラプラシアン

- 行列正則化されたラプラシアンが一般に以下の形で与えられることを示した

$$\hat{\Delta}\hat{\varphi} := X^A \circ X_A \circ \hat{\varphi} \qquad \hat{\varphi} : (N+Q) \times N \text{ 行列}$$

$$\begin{cases} X^A \circ \hat{\varphi} := T_{N+Q}(x^A)\hat{\varphi} - \hat{\varphi} T_N(x^A) \\ x^A : M \to R^D \quad \text{Isometric embedding （計量を保つ埋め込み）} \end{cases}$$

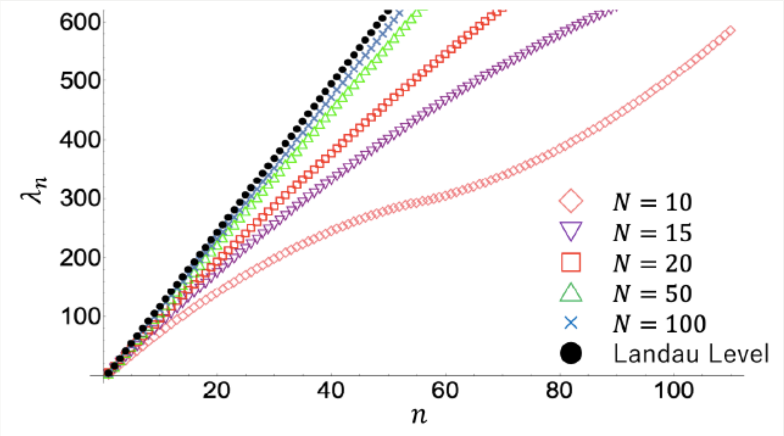
- 例：定磁場の入ったトーラス上のラプラシアンの正則化

$$\Delta = -(D_1^2 + D_2^2)$$

$$[D_1, D_2] \sim F_{12} \sim \text{const.}$$

固有値は1次元調和振動子のものと同じ
（ランダウ準位）

$Q = 1$



[Adachi-Ishiki-Matsumoto-SaitoPRD101(2020)10, 106009]

まとめ

- 行列正則化：関数→行列にmapすることで、対称性を保って正則化できる
- Berezin-Toeplitz量子化：行列正則化を一般的に構成する方法
- 取り組んでいる問題：行列正則化の一般化

関数（電荷をもたないスカラー場） → 電荷をもつスカラー場、テンソル場

- 今後の課題：高次元への一般化
  弦理論（行列模型）や様々なテンソル場理論への応用

重力理論の行列正則化 ⇒ 非可換空間上の重力理論？