

① ラージNゲージ理論の部分② 閉じ込め

渡辺 展正
(物理学専攻D3)

Mainly

Hanada, Ishiki, HW, [JHEP 03 (2019) 145]

HW, Bergner, Bodendorfer, Funai, Hanada, Rinaldi, Schafer, Vranas, [JHEP 02 (2021) 004]

準備) 場の量子論, ゲージ理論

場の量子論 = 特殊相対論 + 量子力学

時空の各点に「場」を定義

対称性などに基づいて理論(Lagrangian/Hamiltonian)を構築

- Lorentz 対称性, 他の大域的な対称性
- スピンと統計性
- ユニタリティ
- ...

ゲージ理論 = ゲージ対称性を持つ理論 (局所的な対称性)

自然界の相互作用を記述することに成功

- 電磁気力、弱い力、強い力

→ ゲージ場の量子論として記述

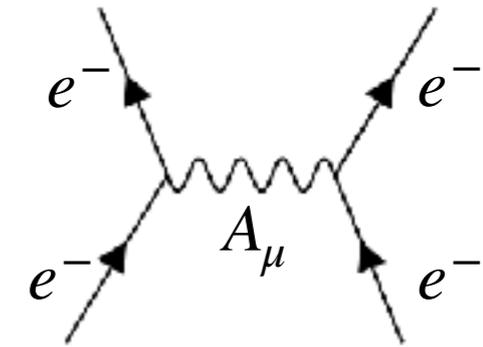
(• 重力 → 量子論は未完成だが、
一般相対論(ゲージ理論)で記述)

①, ラージNゲージ理論とは？

QED(量子電磁力学) : U(1)ゲージ理論, 1つの電荷(磁荷)

$$A_\mu = (\phi, A_i) \quad \psi$$

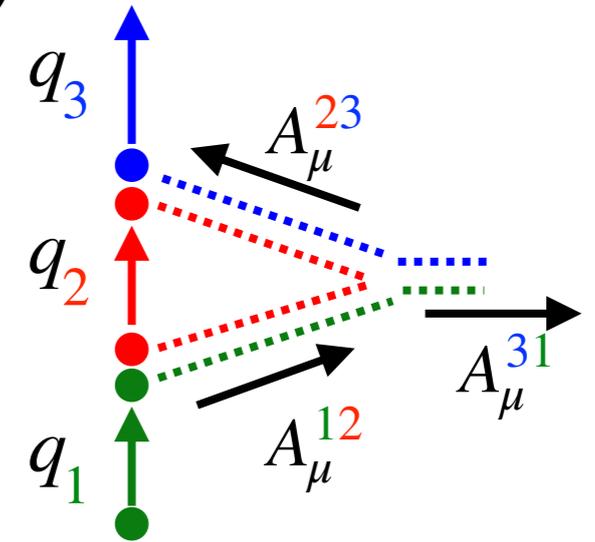
gauge field (photon) electron/positron



QCD(量子色力学) : SU(3)ゲージ理論, 3色の色荷(:colors)

$$\begin{pmatrix} A_\mu^{11} & A_\mu^{12} & A_\mu^{13} \\ A_\mu^{21} & A_\mu^{22} & A_\mu^{23} \\ A_\mu^{31} & A_\mu^{32} & A_\mu^{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

gauge field (gluon) quark



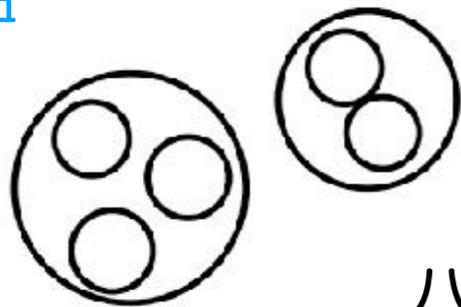
SU(N_c) ゲージ理論, N_c colors

$$\begin{pmatrix} A_\mu^{11} & \dots & A_\mu^{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_\mu^{N1} & \dots & A_\mu^{NN} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Psi^{11} & \dots & \Psi^{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi^{N1} & \dots & \Psi^{NN} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \vdots \\ \Phi^N \end{pmatrix}$$

②, 閉じ込めと非閉じ込め相転移

例) 有限温度系でのQCD

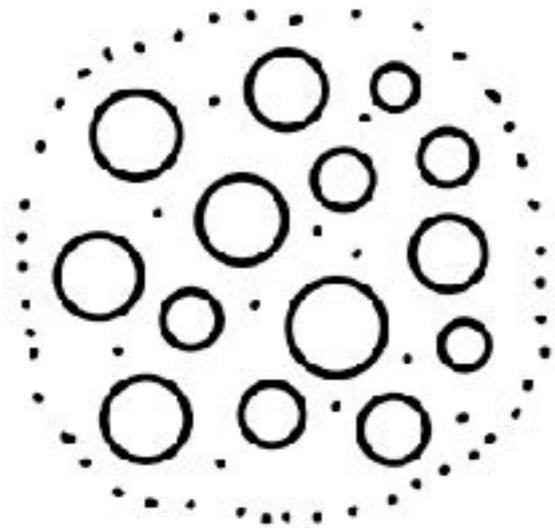
低温



ハドロン相：閉じ込め相
Confined



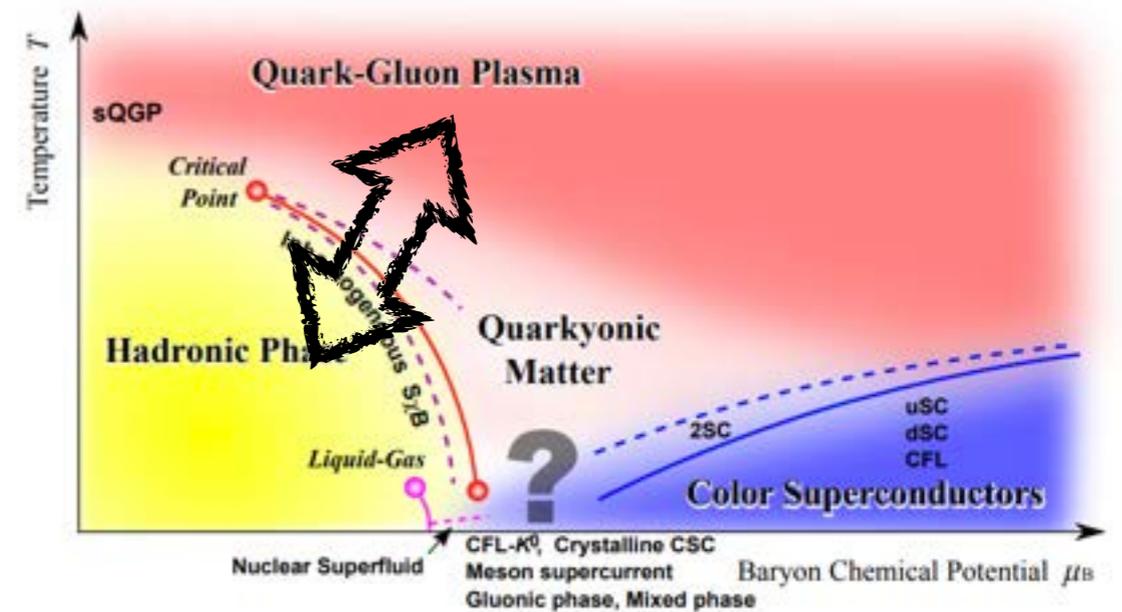
ある温度以上で、
自由度が爆発的に増える



高温

QGP相：非閉じ込め相
Deconfined

QCD相構造の予言



From [Fukushima, Hatsuda, (2011)]

- 格子QCDの計算
- 高エネルギー重イオン衝突実験
- ...

ラーゼン理論での非閉じ込め

非閉じ込め相転移のメカニズムを理解したい → large N SU(N) ゲージ理論へ

- キネマティカルに判定可能 [Witten, (1998)]

自由エネルギーが相を区別する秩序変数となる

$F \sim O(N^0)$: **Confined** ← color singletsが効く (e.g. glueball)

$F \sim O(N^2)$: **Deconfined** ← 全てのcolor dof が効く (e.g. QGP)

- Large N 極限では、鞍点近似(\approx 平均場近似)が厳密な結果となる

- 有限体積 / 弱結合な理論 ($1/R \gg \Lambda_{\text{QCD}}$)でも起こる

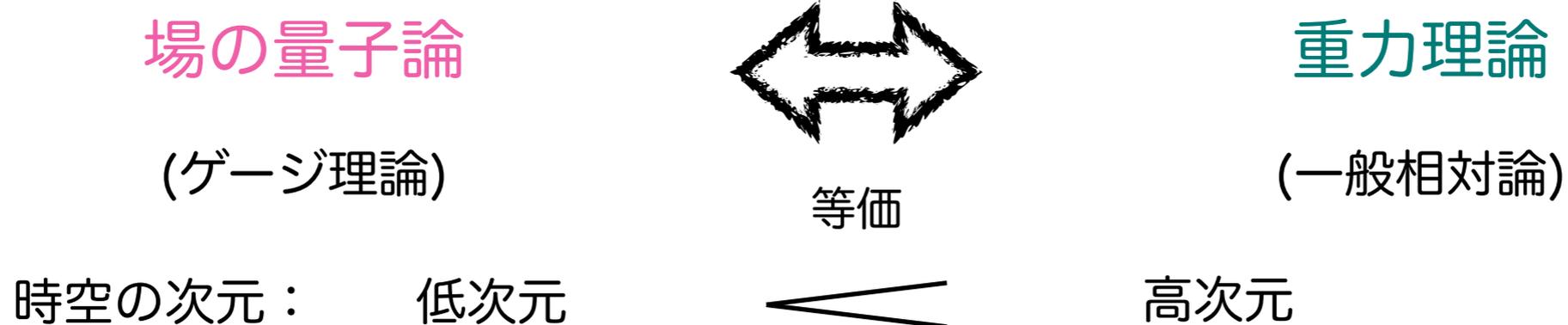
[Sundborg, (1998)/Aharony, Marsano, Minwalla, Papadodimas, V.Raamsdonk, (2003)]

- Large N 極限が熱力学極限の役割 (相転移は「無限自由度の協働現象」)
- 相互作用が強いことが閉じ込めの本質ではない

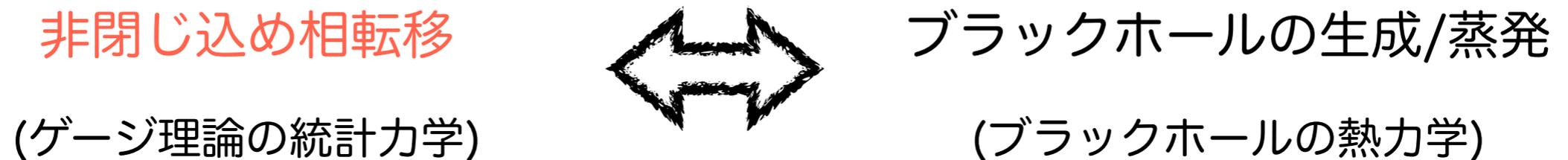
- 超弦理論との関係性

ホログラフィー, ゲージ/重力対応

超弦理論の異なる記述から得られる双対性



: 低次元理論に高次元の情報が「ホログラム」のごとく埋め込まれている



e.g.)

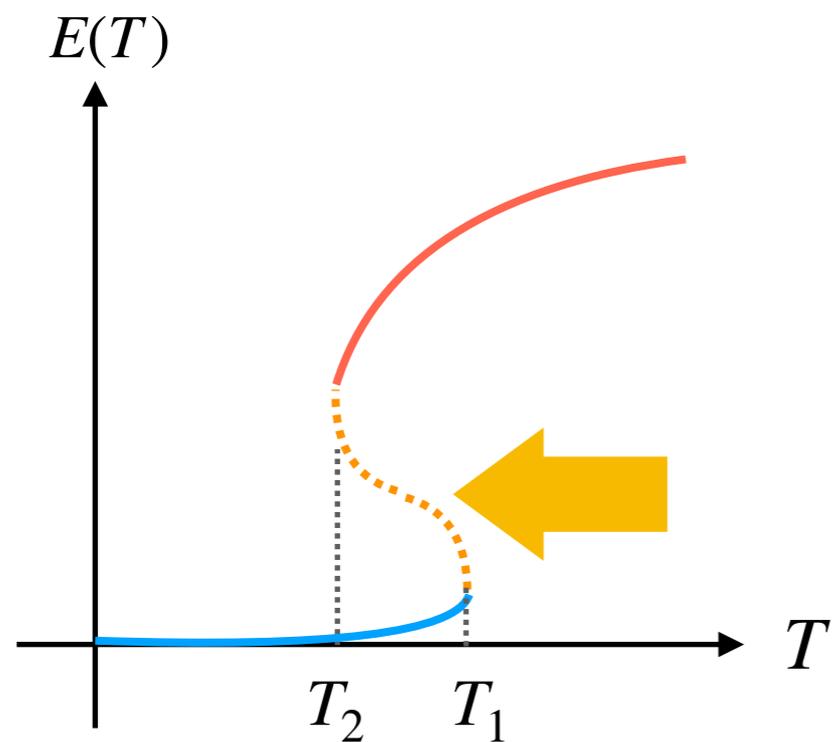
$\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills theory on S^3

IIB SUGRA on $AdS_5 \times S^5$

[Maldacena, (1997)/Aharony, Gubser, Maldacena, Ooguri, Oz, (1999)]

重力理論側の解析では、
(IIB superstring on $AdS_5 \times S^5$)

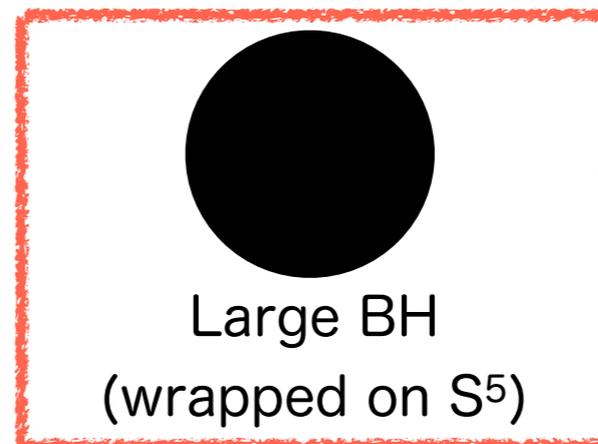
状態方程式



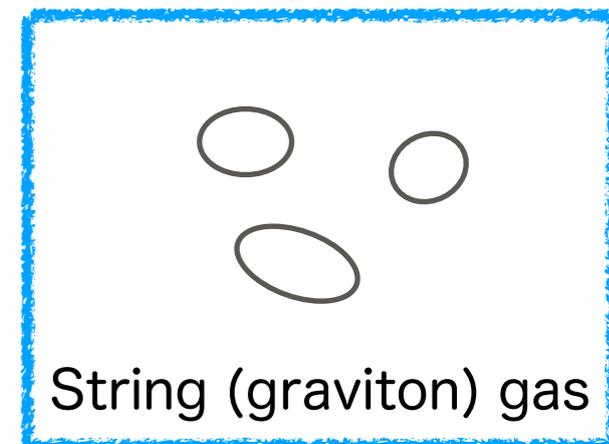
(c.f. 常圧, 0°C付近の水/氷)



[Maldacena, (1997)/Aharony, Gubser, Maldacena, Ooguri, Oz, (1999)]



: 非閉じ込め相



: 閉じ込め相



Q, ゲージ理論側での「中間領域」の対応物は？

Q, 健全な場の量子論で、負の比熱を扱うことが可能なのか？

small black hole は負の比熱を持つ

→ A(の1つ), 部分閉じ込め

部分閉じ込め (Partial Confinement)

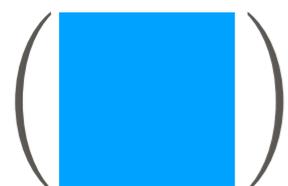
相転移点(付近)で、閉じ込め/非閉じ込め領域が共存する現象

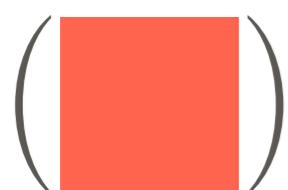
解析計算:[Hanada, Ishiki, HW, (2018)/Hanada, Jevicki, Peng, Wintergerst, (2019)/Hanada, Robinson, (2019)]

数値計算:[HW, Bergner, Bodendorfer, Funai, Hanada, Rinaldi, Schäfer, Vranas, (2020)]

直観的説明: c.f.) [Hanada, Maltz, (2016)]

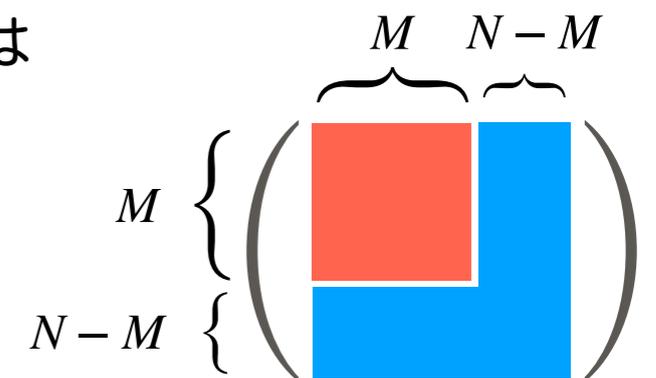
- 場($N \times N$ 行列)の各成分 \approx 調和振動子

 閉じ込め相
: 基底状態(零点振動)

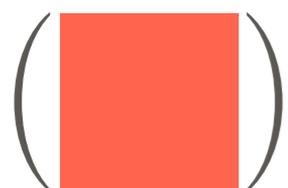
 非閉じ込め相
: 励起状態

部分閉じ込め相では
一部が励起

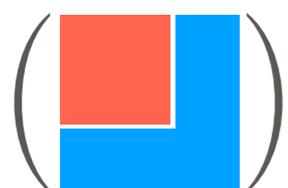
(M : 共存の割合)



- 温度 \approx 単位自由度あたりのエネルギー

 $T \sim E/N^2, \quad T' \sim E'/N^2$

N^2 を固定、 $E' < E$ ならば常に $T' < T$

 $T \sim \frac{E}{M^2(E)}$

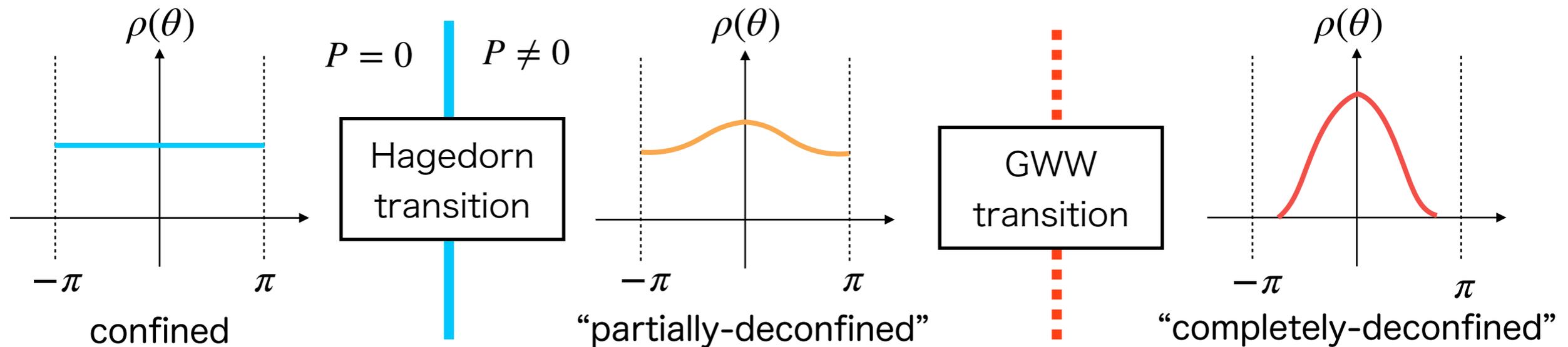
自由度の数 M^2 が変化すると
温度減少時にエネルギーは増加しうる

→ 比熱 $\frac{\partial E}{\partial T}$ が負になりうる

「部分閉じ込め」の見方(例)

- Polyakov loop と Polyakov line phase の分布関数 $\rho^{(P)}(\theta)$ (θ_i : ゲージ場の固有値)

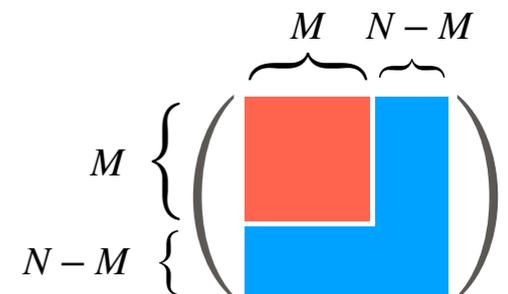
$$P = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^\beta dt A_t \right] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \approx \int d\theta \rho^{(P)}(\theta) e^{i\theta}$$



Gross-Witten-Wadia相転移

[Gross, Witten, (1980) / Wadia, (1980)]

$$\rho^{(P)}(\theta) = \left(1 - \frac{M}{N}\right) \rho_{\text{con}}^{(P)}(\theta) + \frac{M}{N} \rho_{\text{dec}}^{(P)}(\theta)$$

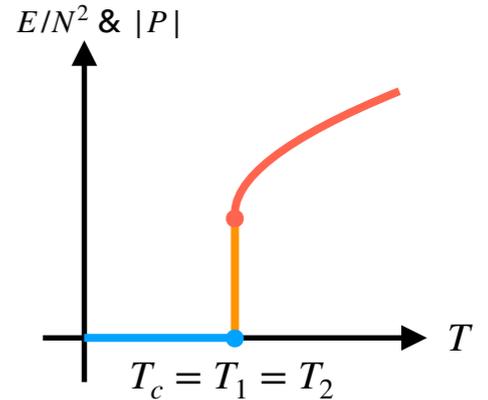


行列模型での検証

[HW, Bergner, Bodendorfer, Funai, Hanada, Rinaldi, Schäfer, Vranas, (2020)]

Gaussian matrix model ($I = 1, 2$): シンプルだが**部分閉じ込め**を起こす模型

$$S = N \int_0^\beta dt \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} (D_t X_I)^2 + \frac{1}{2} X_I^2 \right] \quad (X_I : N \times N \text{ エルミート行列})$$



- Polyakov loop と分布関数 $\rho^{(P)}(\theta)$ [Hanada, Jevicki, Peng, Wintergerst, (2019)]

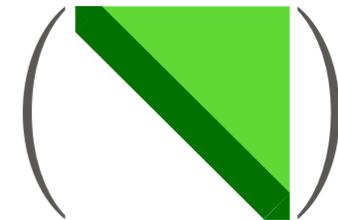
$$\rho^{(P)}(\theta) |_{T_c} = \frac{1}{2\pi} (1 + 2P \cos \theta) = \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} + \frac{M}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} (1 + \cos \theta) = \rho_{\text{con}}^{(P)}(\theta) = \rho_{\text{dec}}^{(P)}(\theta)$$

$$P = 0 + \frac{M}{2N}$$

$\rho_{\text{con}}^{(P)}(\theta)$: Hagedorn 相転移点 (青点) での分布
 $\rho_{\text{dec}}^{(P)}(\theta)$: GWW 相転移点 (赤点) での分布
 (解析的に得られる結果)

- スカラー場の自由度の分布関数による期待値と接続

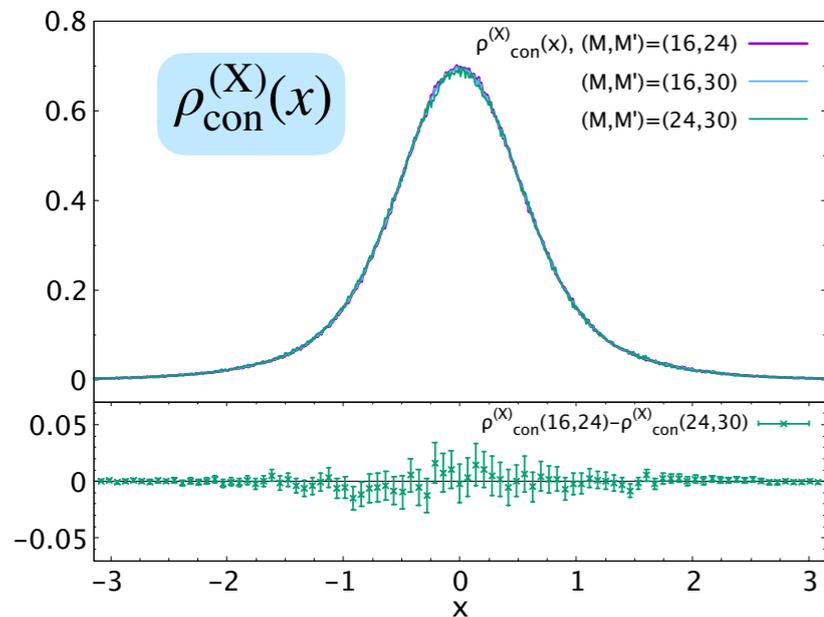
$$\rho^{(X)}(x; M) |_{T=T_c} = \left[1 - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right] \rho_{\text{con}}^{(X)}(x) + \left(\frac{M}{N}\right)^2 \rho_{\text{dec}}^{(X)}(x)$$



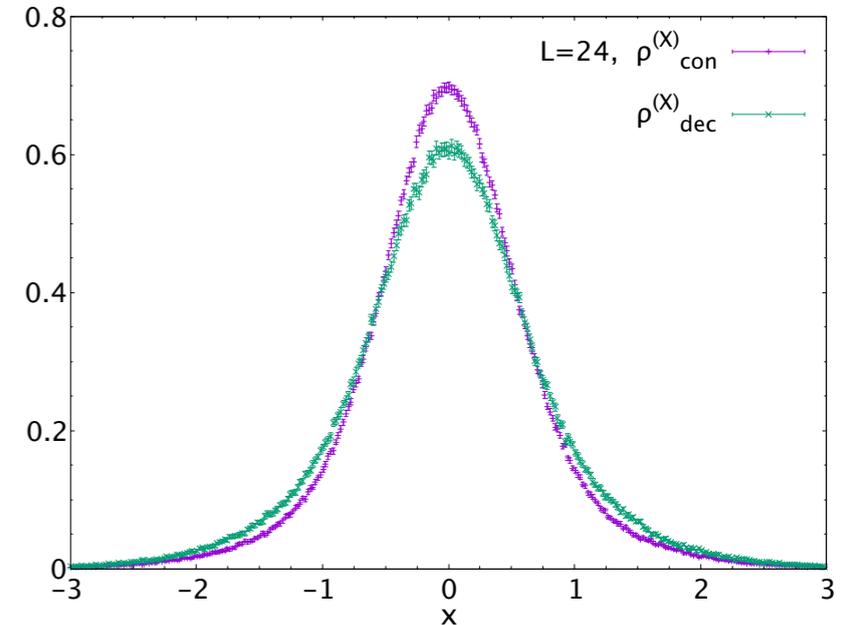
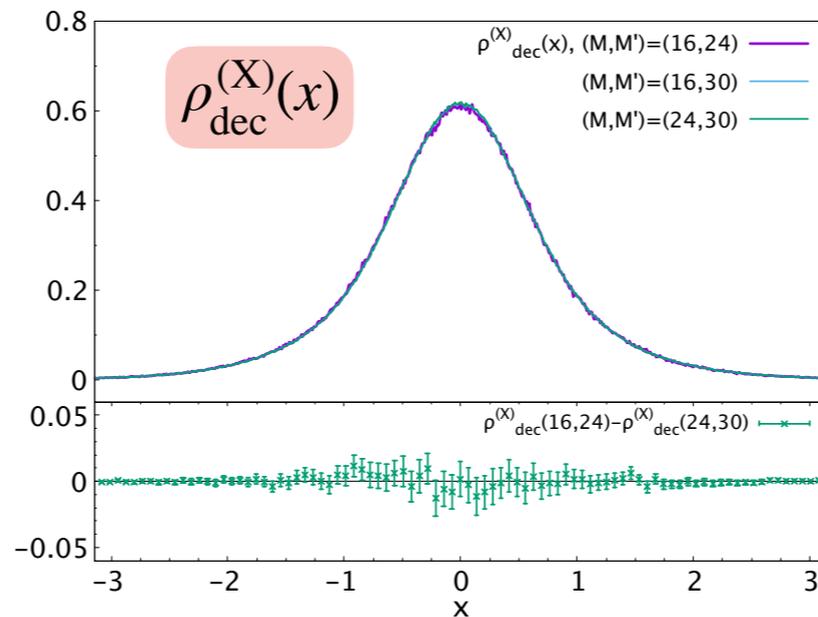
$$\langle x^2 \rangle_{\square} = \int dx x^2 \rho_{\square}^{(X)}(x), \quad \text{: variance}$$

$$x \equiv \left\{ \sqrt{N} X_{I,ii}, \sqrt{2N} \operatorname{Re} X_{I,ij}, \sqrt{2N} \operatorname{Im} X_{I,ij} \right\} \quad (i > j)$$

分布の形は解析的に求まらないため、モンテカルロシミュレーションより求める



(N=32, L=24 @ T=Tc)

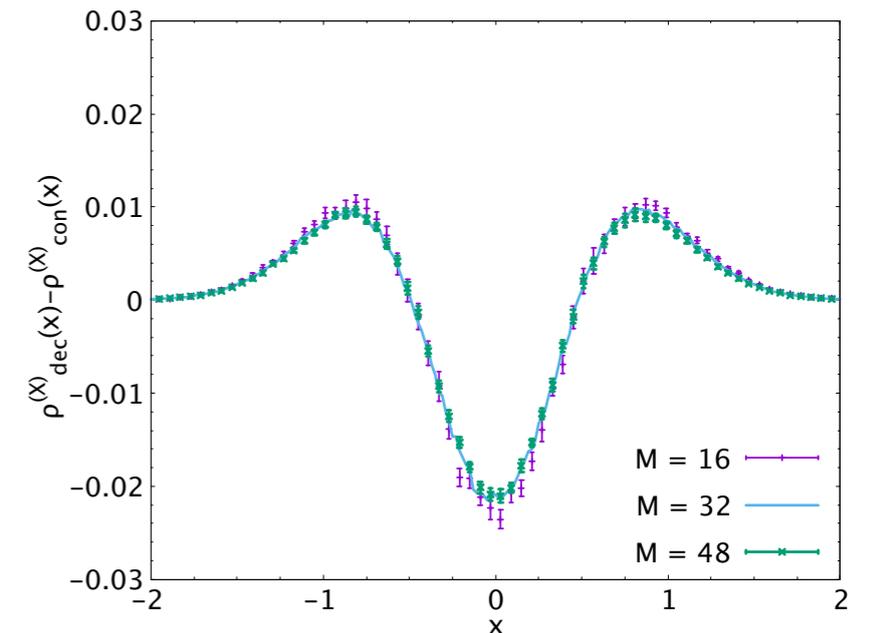
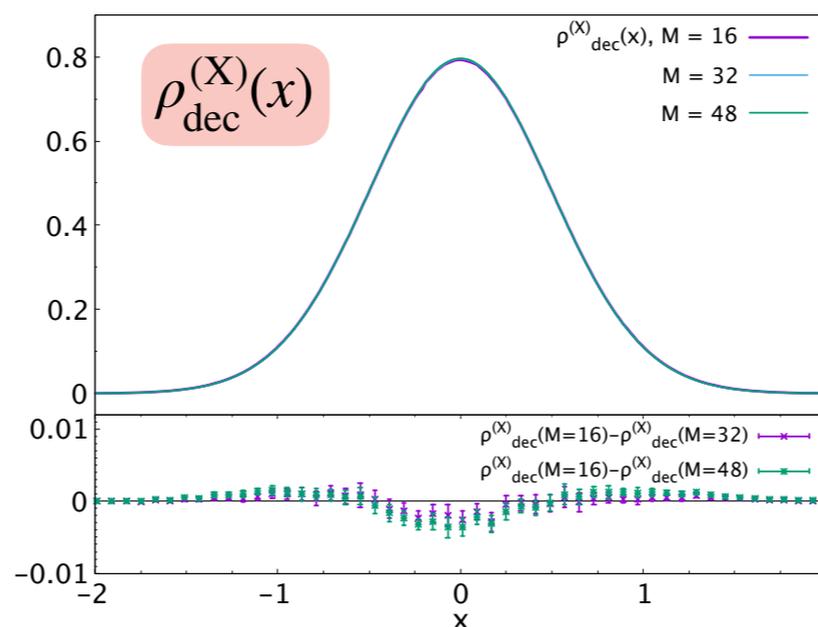
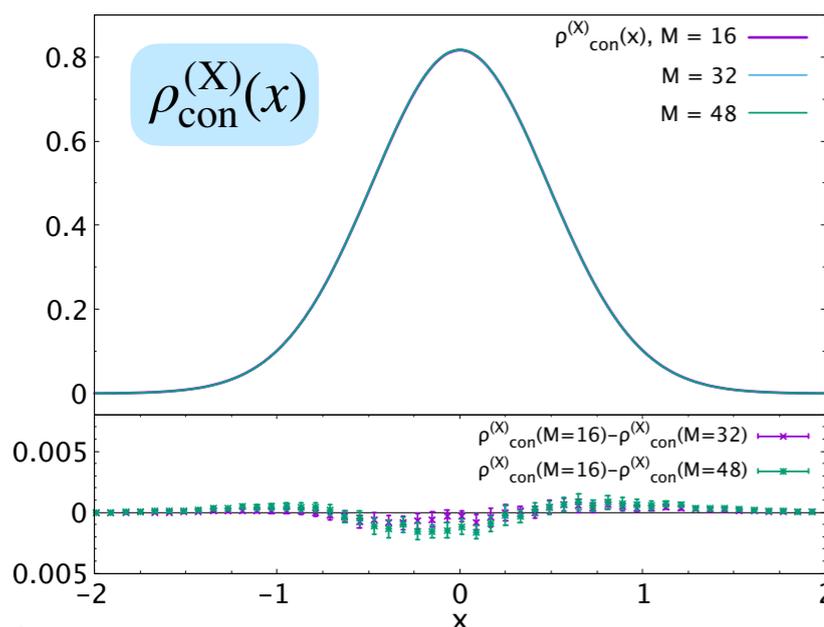


varianceの値は解析結果と一致

+ α) Yang-Mills matrix model ($I = 1, \dots, 9$): 強結合な理論/超弦理論の文脈で重要

$$S = N \int_0^\beta dt \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (D_t X_I)^2 - \frac{1}{4} [X_I, X_J]^2 \right]$$

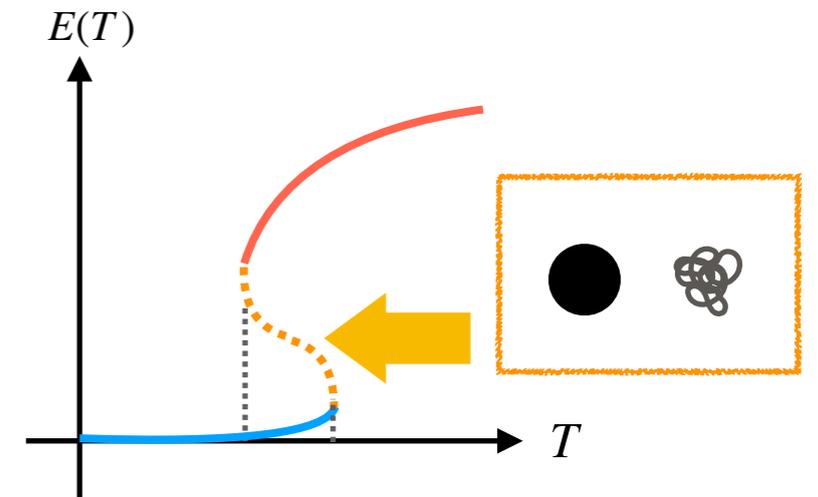
(N=64, L=24 @ T=0.885)



まとめ

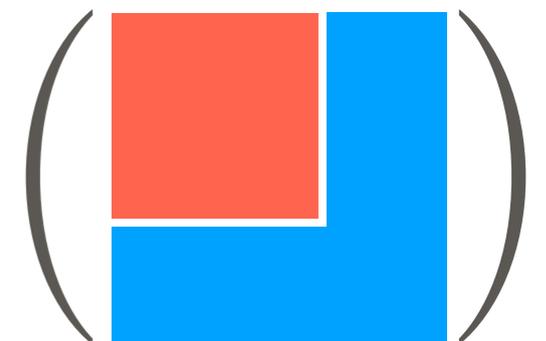
- Large N ゲージ理論の**非閉じ込め相転移**が研究されてきた

- 閉じ込め機構に対する理論的な興味
- **非閉じ込め相転移**は超弦理論の文脈で高次元ブラックホールの転移に対応
- 相転移の過程で**部分閉じ込め**が起こる



- **部分閉じ込め**が起こるモデルを解析的/数値的に調べた

- 2つの相転移により隔てられた相として存在
 - GWW相転移の物理的意味を強調
- 負の比熱を表現するポテンシャルを持つ
- 強結合な理論でも発生する



今後の展望

- これまで扱ってきたモデルは「一次相転移」を示す

- カノニカル分布の取り扱いでは、準安定相にあたる
- 主に行列場のみを含む理論を考察

→ベクトルスカラー場を導入し、理論の相構造を変化させたモデルを調べる

[HW in progress]

- 超弦理論の文脈で物理的意味が明確な行列モデルでの解析

[Bergner, Bodendorfer, Hanada, Pateloudis, Rinaldi, Schäfer, Vranas, HW, (2020)]

- 格子モンテカルロ計算により、“閉じ込め相”を発見
- 超弦理論/M理論の対応関係に迫れる？

- 4次元QCDなど現実世界での現象への適用は？