

行列幾何とその進展

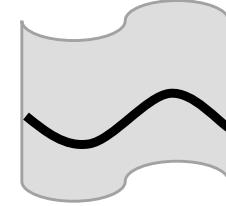
筑波大学 素粒子論研究室 D3 足立 宏幸

共同研究者:伊敷 吾郎 (筑波大),菅野 聡(筑波大), 松本 高興(DIAS)

行列正則化とは？

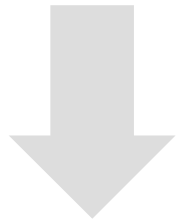
IIB型超弦理論

M : 弦の世界面



$$S_{\text{string}} = \int_M d^2\sigma \sqrt{\det g} \{X^\mu, X^\nu\}^2 + \text{fermion}$$

X^μ : 弦の座標関数
 $\{, \}$: ポアソン括弧



行列正則化:

$$M \text{ 上の関数 } X^\mu \rightarrow N \times N \text{ 行列 } \widehat{X}^\mu$$

$$\{, \} \rightarrow i[,]$$

$$\int_M d^2\sigma \sqrt{\det g} \rightarrow \text{Tr}$$

[Hoppe]

$$S_{\text{MM}} = \text{Tr} \left([\widehat{X}^\mu, \widehat{X}^\nu]^2 + \text{fermion} \right)$$

[IKKT]

- 関数を有限サイズの行列で表現する, 量子化に類似した方法
- 弦理論などを含む場の理論の多くに適用可能であり, 弦理論の非摂動的な解析などに用いられている [BFFS], [IKKT], ...

弦理論の文脈では, 行列を用いた幾何の構造が頻繁に現れる.
量子重力理論では, 行列幾何などの量子化された空間が重要?

今回紹介する研究

従来考えられてきたもの

関数

↓
行列正則化

正方行列

我々の研究グループでの新たな成果

一般の場合 (様々な接続を持つベクトル束の切断)
例1. 一般の背景場と結合するスカラー場
例2. テンソル場 **arXiv:2103.09967, 2110.15544**

↓
行列正則化の一般化

(長方+正方)行列

これにより, より広いクラスの場の理論の行列正則化が可能になる!

1. 行列正則化の数学的構造

- 幾何学的量子化(量子化の数学的一般化)の一種

n 自由度の解析力学(拘束条件なし)の場合

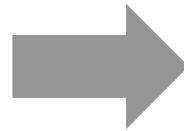
相空間： $\mathbb{R}^{2n}$, 座標 $(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$,

物理量： $\mathbb{R}^{2n}$ 上の実関数 $f, g, \dots$

ポアソン括弧： $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p^a} - \frac{\partial f}{\partial p^a} \frac{\partial g}{\partial q^a}$

無限次元のヒルベルト空間 $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ を用いた量子化が存在:

物理量 f
ポアソン括弧 $\{q^a, p^b\} = \delta_{ab}$
積分 $\int_{\mathbb{R}^{2n}} dq^1 dp^1 \dots dq^n dp^n$

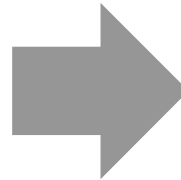


H 上のエルミート演算子 $\hat{f}$
交換子 $[\hat{q}^a, \hat{p}^b] = i\hbar \delta_{ab} \mathbf{1}$
トレース $(2\pi\hbar)^n \text{Tr}$

- 幾何学的量子化は, より一般的な相空間 (シンプレクティック多様体) に対して同様に量子化の類似物を構成する数学的試み
- コンパクトで境界のないシンプレクティック多様体に対しては, 関数を有限次元の正方行列で表現できる量子化の類似物が知られており, 行列正則化と呼ばれる

多様体 M 上の関数 f
 複素共役 f^*
 関数の積・
 ポアソン括弧 $\{, \}$
 積分 $\int_M dv (\dots)$

行列正則化



$N \times N$ 行列 $\hat{f}$
 複素転置 $\hat{f}^\dagger$
 行列積・
 交換子 $-i\hbar^{-1} [\ , \]$
 トレース $(2\pi\hbar)^n \text{Tr}(\dots)$
 $(\hbar \sim \text{定数} \times N^{-1/n})$

行列正則化の正確な定義

$2n$ 次元シンプレクティック多様体 M

- 非退化な閉2形式 $\omega = \omega_{ab} dx^a \wedge dx^b$ が定義される (シンプレクティック形式)

導かれる性質

- (ω_{ab}) の逆行列を $(-W^{ab})$ とすると, $\{f_1, f_2\} := W^{ab} \partial_a f_1 \partial_b f_2$ はポアソン括弧 (双線形性, 反対称性, ライプニッツ則, ヤコビ律を満たす)
- 体積形式 $dv = \frac{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}{n!}$ が定まり, 関数の積分が定義できる

例. 相空間 $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\omega = dq^a \wedge dp^a \Rightarrow \{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial q^a} \frac{\partial f_2}{\partial p^a} - \frac{\partial f_1}{\partial p^a} \frac{\partial f_2}{\partial q^a}, \quad dv = dq^1 \wedge dp^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dp^n$$

定理. 行列正則化

コンパクトで境界がない多様体 M の場合, 線形写像 $f \in C^\infty(M) \mapsto \hat{f} \in M_N(\mathbb{C})$ で以下を満たすものが存在し, 行列正則化と呼ばれる:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\widehat{f_1 f_2} - \widehat{f_1} \widehat{f_2}| = 0,$$

行列積 $\sim$ 関数の積

$$\lim_{N \rightarrow \infty} | -i\hbar^{-1} [\widehat{f_1}, \widehat{f_2}] - \widehat{\{f_1, f_2\}} | = 0,$$

交換子 $\sim$ ポアソン括弧

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2\pi\hbar)^n \text{Tr } \hat{f} = \int_M dv f. \quad \left(\hbar = \frac{\text{定数}}{N^{1/n}} \right) \quad \text{トレース} \sim \text{積分}$$

多様体 M 上でスピノルを定義できる時, Berezin-Toeplitz量子化(BT量子化)という具体的な構成法が存在する [Bordemann-Meinrenken-Schlichenmaier]

BT量子化のアイデア

- 場の強さがシンプレクティック形式に比例する電磁場 A を考える: $F = dA \propto \omega$.
- A と電荷 p で結合する荷電スピノル場 ψ に作用するディラック演算子

$$D := i \gamma^a (\partial_a - i p A_a + \dots)$$

を導入すると, ゼロモードの空間 $\text{Ker } D$ は有限次元になる.

$$N := \dim \text{Ker } D = \frac{p^n}{n!} + O(p^{n-1})$$

- 射影 Π : 荷電スピノル全体の空間(無限次元) $\rightarrow \text{Ker } D$ (N 次元)

行列写像の定義

関数をスピノルに作用する演算子とみなす: $\psi \mapsto f\psi$.

$\hat{f}$ を $\text{Ker } D \rightarrow \text{Ker } D$ の写像

$$\hat{f} = \Pi f \Pi \simeq N \times N \text{ 行列}$$

とすれば行列正則化になっていることが示されている:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\widehat{f_1 f_2} - \widehat{f_1} \widehat{f_2}| = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} | -i\hbar^{-1} [\widehat{f_1}, \widehat{f_2}] - \widehat{\{f_1, f_2\}} | = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (2\pi\hbar)^n \text{Tr } \hat{f} = \int_M dv f .$$

3. 行列正則化の拡張

従来考えられてきたもの

関数



行列正則化

正方行列

我々の研究グループでの新たな成果

一般の場合（様々な接続を持つベクトル束の切断）

例1. 一般の背景場と結合するスカラー場

例2. テンソル場 [arXiv:2103.09967, 2110.15544,](#)



行列正則化の一般化

(長方+正方)行列

これにより、より広いクラスの場の理論の行列正則化が可能になる！

BT量子化の拡張

提案:

行列正則化したい場 ϕ を適切な荷電スピノルに作用する演算子とみなす:

$$\psi^{(2)} \mapsto \psi^{(1)} = \phi \psi^{(2)}.$$

例. (1,1)-テンソル場 $T_a{}^b$

$$T_a{}^b \psi_b^{(2)} = \psi_a^{(1)}, \quad (\psi_b^{(2)}, \psi_a^{(1)}: \text{テンソルの足を持つ荷電スピノル})$$

例. リー群 G の随伴表現に属する場 $f_{\text{adj.}}$

$$f_{\text{adj.}} \psi_{\text{fund.}}^{(2)} = \psi_{\text{fund.}}^{(1)}, \quad (\psi_{\text{fund.}}^{(2)}, \psi_{\text{fund.}}^{(1)}: \text{基本表現に属する荷電スピノル})$$

$\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ の属する空間のゼロモードの空間をそれぞれ

$$\text{Ker } D_1 \text{ (} N_1 \text{次元)}, \quad \text{Ker } D_2 \text{ (} N_2 \text{次元)}$$

とし, それらへの射影を Π_1, Π_2 とする.

$$\hat{\phi} = \Pi_1 \phi \Pi_2 \simeq N_1 \times N_2 \text{ 行列}$$

有用な諸性質

1. 行列積 ~ 場の積

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\widehat{\phi} \hat{\chi} - \widehat{\phi \chi}| = 0$$

$$\hat{\phi} = \Pi_1 \phi \Pi_2, \quad \hat{\chi} = \Pi_2 \chi \Pi_3$$

例. (1,1)-テンソルの場合, 行列積に対応する場の積は $\phi_a{}^b \chi_b{}^c$

2. 一般化交換子 ~ 一般化ポアソン括弧

$$\lim_{p \rightarrow \infty} | -i\hbar^{-1} [\hat{f}, \hat{\phi}] - \widehat{\{f, \phi\}} | = 0$$

ここで, 一般化交換子と一般化ポアソン括弧はそれぞれ

$$[\hat{f}, \hat{\phi}] := \hat{f}^{(1)} \hat{\phi} - \hat{\phi} \hat{f}^{(2)}, \quad \{f, \phi\} := W^{ab} \partial_a f \nabla_b \phi,$$

$$\hat{f}^{(\alpha)} := \Pi_\alpha f \Pi_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2) \text{ for 関数 } f$$

3. 場の共役 ～ 行列の共役

場の共役 $\phi^\dagger$ に対して,

$$(\hat{\phi})^\dagger = \widehat{\phi^\dagger}$$

例. (1,1)-テンソルの場合, 場の共役は $(\phi_a^b)^\dagger = g_{aa'} g^{bb'} (\phi_b^a)^*$

4. トレース ～ トレース積分

場の行列正則化が $\hat{\phi} = \Pi_1 \phi \Pi_1$ と書ける場合, $\hat{\phi}$ は正方行列になる.
その場合, 行列のトレースおよび場のトレースが定まり,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (2\pi\hbar)^n \text{Tr } \hat{\phi} = \int_M dv \text{tr } \phi$$

例. (1,1)-テンソルの場合, 場のトレースは $\text{tr}(\phi_a^b) = \phi_a^a$

まとめ

- 行列正則化は, 相空間を一般化したシンプレクティック多様体に定まる量子化の類似物で, 弦理論の行列模型と深く関連
- 関数の行列正則化を拡張し, 一般の場の行列正則化を構成

多様体 M 上の場 ϕ
場の共役 $\phi^\dagger$
場の積・
一般化ポアソン括弧 $\{, \}$
トレース積分 $\int_M dv \operatorname{tr}(\dots)$



行列 $\hat{\phi}$
複素転置 $\hat{\phi}^\dagger$
行列積・
一般化交換子 $-i\hbar^{-1}[\ ,]$
トレース $(2\pi\hbar)^n \operatorname{Tr}(\dots)$

- 上述の技術を使い, 関数だけではない様々な場の理論に行列正則化が可能

$$S = \int_M dv \operatorname{tr}(g^{ab} \nabla_a \phi^\dagger \nabla_b \phi)$$



$$S = \operatorname{Tr} \left(\hat{\phi}^\dagger \left[\widehat{X^A}, [\widehat{X^A}, \hat{\phi}] \right] \right)$$

さらなる目標

- 現状, 多様体 M は正定値計量をもつリーマン多様体のみしか扱えないが, 我々の宇宙を表すローレンツ多様体で同様の議論をしたい!