GAUGE THEORIES AND MATRIX MODELS

伊敷　吾郎

arXiv:2311.14984[hep-th]

足立宏幸氏、菅野聡氏（筑波大学）らとの共同研究

素粒子理論

- ◆ 18種類の素粒子 （電子、クォーク6種類、光子、重力子、グルーオン・・・）
- ◆ 4種類の相互作用 （重力、電磁気力、弱い力、強い力）

これらを統一的に記述する理論が作れるか？

これまで最も成功している理論は標準模型と呼ばれている

- ◆ 標準模型では、素粒子を「点粒子」として記述する
- ◆ 標準模型では重力・重力子を記述することができない（くりこみ不可能）

超弦理論

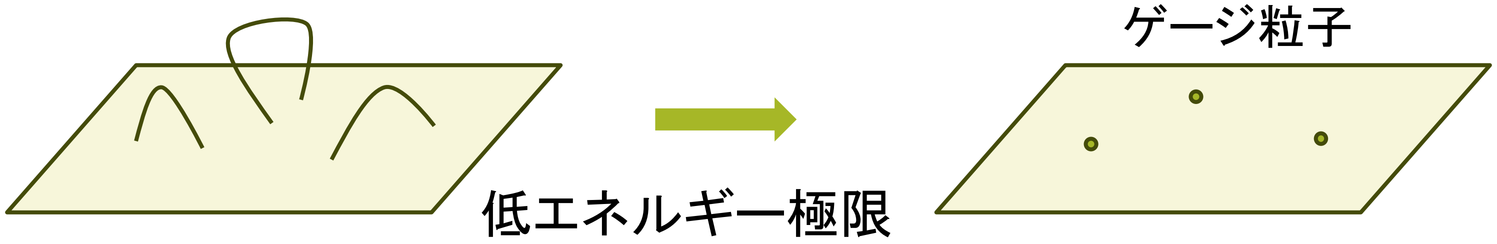
- 素粒子は「弦(ひも)」であると仮定して作られた理論

- 理論に現れる物体

閉弦　　開弦　　Dブレーン

スピン2の重力子等に対応　　スピン1のゲージ粒子等に対応　　開弦がくっつく物体

- Dブレーンの上にはゲージ理論が現われる



開弦のmasslessモードが作るゲージ理論が生じる

弦理論の問題点

◆ 摂動論しか完成していない

・相互作用が非常に弱い状況には適用できるが、そうでなければ計算する方法が分からない

・Dブレーンの扱い方がよく分からない

◆ 弦理論の非摂動的定式化が必要とされている

・行列模型（matrix model）

・弦の場の理論

など

[BFSS, IKKT, DVV]

行列模型

- 弦理論の非摂動的定式化として提唱された模型

- 行列模型の定義

$$S = \frac{1}{g}\mathrm{Tr}[\hat{X}^A, \hat{X}^B]^2 + \cdots$$

$\hat{X}^A (A = 0, 1, \cdots, D)$: $N \times N$ エルミート行列

理論の”ゲージ対称性”: $\hat{X}^A \to \hat{U}\hat{X}^A\hat{U}^\dagger$ $\quad \hat{U} \in U(N)$ $\quad$ (微小変換 $\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}\hat{X}^A = i[\hat{\alpha}, \hat{X}^A]$)

- 弦やDブレーンのダイナミクスを本当に記述できるのか？

本研究で考えた問題＆結果

◆ 問題：行列でD-braneを記述できるとすると、ゲージ理論と行列はどのように関係するのか？

k枚重なったDブレーン

低エネルギー

B：ゲージ場

χ：スカラー場

U(k)ゲージ理論

ゲージ変換

$$\delta_\beta B_\alpha = D_\alpha \beta$$
$$\delta_\beta \chi_i = -i[\chi_i, \beta]$$

？？？

行列 $\hat{X}^A$

$$\hat{\delta}_{\hat{\alpha}} \hat{X}^A = i[\hat{\alpha}, \hat{X}^A]$$

局所的な場（接続＆切断）

$B(x) \quad \chi(x)$

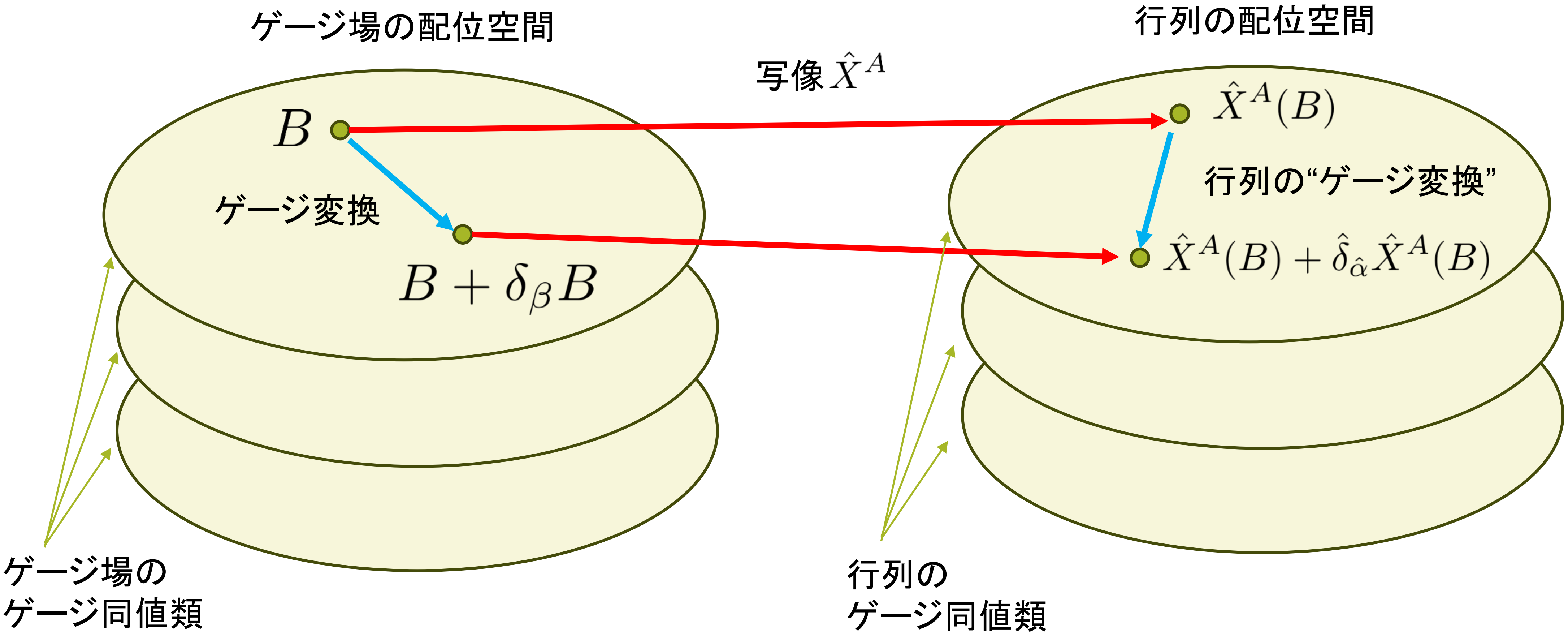
？？？

$\hat{X}^A =$ （有限サイズの行列）

◆ 得られた結果:

写像: $(B,\chi) \to \hat{X}^A(B,\chi)$ で、両者の対称性が両立するものを提案した(cf. Seiberg-Witten写像)

$$\boxed{\hat{X}^A(B,\chi) + \hat{\delta}_{\hat{\alpha}}\hat{X}^A(B,\chi) = \hat{X}^A(B+\delta_\beta B, \chi+\delta_\beta\chi)}$$



目次

2. 写像 $(B,\chi)\to\hat{X}^A(B,\chi)$ の構成方法の概略

① ansatz： $\hat{X}^A(B,\chi)=T(X^A\mathbf{1}_k+\hbar\tilde{X}^A(B,\chi))$

$\hat{\alpha}(\beta,B,\chi)=T(\alpha(\beta,B,\chi))$

例えば球面状のD-braneだと

$$X^1=\sin\theta\sin\phi$$
$$X^2=\sin\theta\cos\phi$$
$$X^3=\cos\theta$$

X^A ：Dブレーンの形状を表す関数（埋め込み関数）

$\tilde{X}^A(B,\chi)$: $k\times k$ 行列値関数 “ゆらぎ”

$\alpha(\beta,B,\chi)$: $k\times k$ 行列値関数

T ：Berezin-Toeplitz量子化（関数からN×N行列への線形写像でよい性質を保つもの）

$\hbar=1/N$

② 条件 $\hat{X}^A(B,\chi)+\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}\hat{X}^A(B,\chi)=\hat{X}^A(B+\delta_\beta B,\chi+\delta_\beta\chi)$ を課して

ゆらぎ $\tilde{X}(B,\chi)$ の関数形と、パラメータの関係 $\alpha(\beta,B,\chi)$ を求める

[Bordemann-Meinrenken-Schlichenmaier,
Ma-Marinescu]

Berezin-Toeplitz 量子化

◆ 手順（2次元）

① コンパクトリーマン面 $\mathcal{M}$ とケーラー構造が与えられているとする

② $\mathcal{M}$ 上の一様磁場と結合する電荷Nのスピノル場を考える

③ $\mathcal{M}$ 上の関数をスピノルの上の線形写像と考え、その作用をディラック演算子のゼロモード（丁度N個）の上に制限する

④ $T(f) := \Pi f \Pi$ はN×N行列で、
$f \to T(f)$ は量子化を与える

$$\lim_{\hbar \to 0} ||\frac{i}{\hbar}[T(f), T(g)] - T(\{f, g\})|| = 0$$

$$\hbar = 1/N$$

$$\begin{tikzcd} \psi \arrow[r, "f \in C^\infty(\mathcal{M})"] \arrow[d, "\text{制限}"] & f\psi \\ \Pi\psi \arrow[r, "\Pi f \Pi"] & \Pi f \Pi \psi \end{tikzcd}$$

ψ : スピノル

Π : ディラックゼロモードへの射影

◆ さらにスピノル場をU(k)のゲージ場に結合する基本表現のスピノル場に拡張すると、行列値関数（随伴表現の場）の量子化も出来る

例: 2次元球面上のゲージ理論

$$\sum_{A=1}^{3} X^A X^A = 1$$

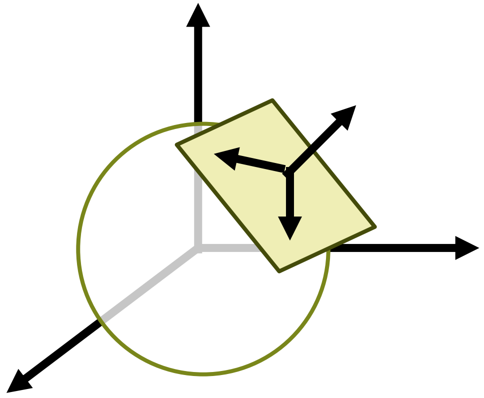
$$\hat{X}^A(B,\chi) = T(X^A \mathbf{1}_k + \hbar \tilde{X}^A(B,\chi))$$

ゆらぎ $\tilde{X}^A(B,\chi) = A^\alpha(B,\chi)\nabla_\alpha X^A + \phi(B,\chi)X^A$

水平方向の揺らぎ　垂直方向の揺らぎ

$$\begin{cases} A^\alpha(B,\chi) = W^{\alpha\beta}(B_\beta + \hbar B_{1,\beta}(B,\chi) + \cdots) \\ \phi(B,\chi) = \chi + \hbar\chi_1(B,\chi) + \cdots \\ \alpha(\beta,B,\chi) = \beta + \hbar\beta_1(\beta,B,\chi) + \cdots \end{cases}$$

（W :ポアソンテンソル）



②の条件を解いて以下を得ることができる

$$\begin{cases} \chi_1 = -B_-B_+ + i\nabla_-\chi B_+ - iB_-\nabla_+\chi - \frac{1}{2}B_-[B_+,\chi] + \frac{1}{2}[B_-,\chi]B_+, \\ B_{1,-} = -\frac{1}{2}B_- + B_-\chi + \frac{i}{2}(\nabla_-B_-)B_+ - iB_-\nabla_+B_- + \frac{i}{2}B_-\nabla_-B_+ + \frac{1}{2}B_-[B_-,B_+], \\ B_{1,+} = -\frac{1}{2}B_+ + \chi B_+ - \frac{i}{2}B_-\nabla_+B_+ + i(\nabla_-B_+)B_+ - \frac{i}{2}(\nabla_+B_-)B_+ + \frac{1}{2}[B_-,B_+]B_+, \\ \beta_1 = -\frac{i}{2}B_-\nabla_+\beta + \frac{i}{2}\nabla_-\beta B_+. \end{cases}$$

Localなゲージ対称性の出現？

◆Localなゲージ変換 $\begin{cases} \delta_\beta B_\alpha = D_\alpha \beta \\ \delta_\beta \chi_i = -i[\chi_i, \beta] \end{cases}$ が行列模型からどのように現れるのか？

写像 $\hat{X}^A(B,\chi) = T(X\mathbf{1}_k + \hbar \tilde{X}(B,\chi))$ は以下のゲージ変換の下で不変であることが分かる

$$\left.\begin{array}{l} \delta_\beta B_\alpha = D_\alpha \beta \\ \delta_\beta \chi_i = -i[\chi_i, \beta] \end{array}\right\} \text{引数の変形}$$

$$\delta_\beta A^{(E)} = D_\alpha \beta \qquad \text{量子化の変形}$$

ここで $A^{(E)}$ はBerezin-Toeplitz量子化 T を構成するのに用いたU(k)のゲージ場

Localなゲージ変換 ⇔ 量子化写像の（ゲージ）redundancy

3. 写像の応用（2次元ゲージ理論と行列模型の関係）

◆ 例としてcubic matrix modelを考える $S=\mathrm{Tr}\left(\hat{X}^A\hat{X}^A+\frac{i\alpha}{\hbar_p}\epsilon^{ABC}\hat{X}^A\hat{X}^B\hat{X}^C\right),$

これに $\hat{X}^A(B,\chi)=T(X\mathbf{1}_k+\hbar\tilde{X}(B,\chi))$ を代入して計算すると、(B,χ) で書かれたゲージ理論が得られる

行列模型の“ゲージ対称性”　⇒　得られる理論のゲージ対称性が保証される

◆ 2次元球面の場合の結果

$$
\begin{aligned}
S=&\int_M\frac{\omega}{4}\mathrm{tr}\left[2\chi+\hbar_p(2F_{12}^0\chi-2\chi+\chi^2)+\hbar_p^2\left(-\chi^2-D_-\chi D_+\chi+\chi^2F_{12}^0+\frac{R}{2}\chi\right)\right]\\
&+\alpha\int_M\frac{\omega}{4}\mathrm{tr}\left[-3\chi-3\hbar_p\left(\chi^2-\frac{3}{2}\chi\right)-3\hbar_p^2\left(-\frac{3}{2}F_{12}^0\chi-\frac{1}{3}\chi^3-\frac{3}{2}\chi^2+\frac{5}{4}\chi\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}(F_{12}^0)^2-2D_-\chi D_+\chi+\frac{1}{2}F_{12}^0(D_-D_++D_+D_-)\chi\right)\right]+O(\hbar_p^3),\qquad \alpha=\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{3}\hbar_p+\cdots,\\
=&\int_M\frac{\omega}{2\pi}\hbar_p\mathrm{tr}(2F_{12}^0\chi-\chi^2)+O(\hbar_p^2).
\end{aligned}
$$

massive BF theory

◆ 同様に4次のmatrix modelを考えると

$$\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}[\hat{X}^A,\hat{X}^B][\hat{X}^A,\hat{X}^B]+\frac{2}{3}i\alpha\hbar_p\epsilon^{ABC}\hat{X}^A\hat{X}^B\hat{X}^C\right)$$

$$=\int\frac{\omega}{4}\mathrm{tr}\hbar_p^2\left[2(1-\alpha)\chi+\hbar_p\left(\frac{1}{2}(F_{12}^0)^2+D_-\chi D_+\chi+(3-2\alpha)\chi^2-2F_{12}^0\chi+(3\alpha-1)\chi\right)+O(\hbar_p^4)\right]$$

2次元Yang-Mills + adjoint scalar

行列模型とゲージ理論を対応付けることができた

まとめ

- 超弦理論は重力も含んだ量子論であるが、非摂動的定式化が完成していない
- 「行列模型」はその非摂動的定式化を与えると予想されている
- 行列がどのようにDブレーン上のゲージ理論を記述するのか？
- Berezin-Toeplitz量子化に基づいてゲージ場（＋スカラー場）と行列を関係づける写像を得た
- 行列模型の作用とゲージ理論の作用を関係づけられた

展望

- 弦のmassless mode（低エネルギー極限）だけでなく、massive modeも含んだ写像が作れないか？
  ⇒　Berezin-Toeplitz量子化のloop空間/path空間への拡張