行列模型における幾何学とその応用

(Describing geometries in matrix model and its applications)

筑波大学 素粒子論研究室 D3
菅野　聡

朝永センター報告会 7/2

足立宏幸氏(筑波大)、伊敷吾郎氏(筑波大)との共同研究
2311.14984v2[hep-th]、2210.01397[hep-th]

目次

1. Introduction

弦理論と４つの基本相互作用

- 重力
- 電磁気力
- 強い力
- 弱い力

電磁気力・強い力・弱い力 → 場の量子論

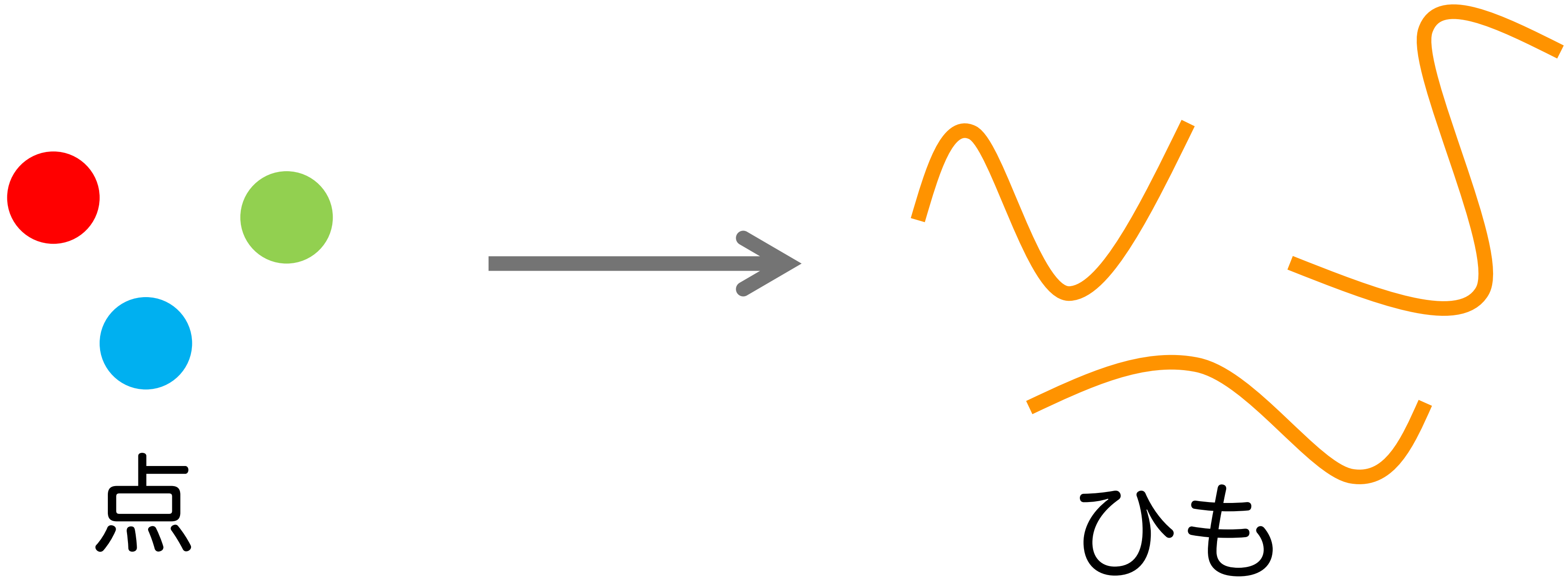
重力・電磁気力・強い力・弱い力 → 弦理論

最終目標

弦理論を定式化して、4つの基本相互作用を統一!!

弦理論の誕生

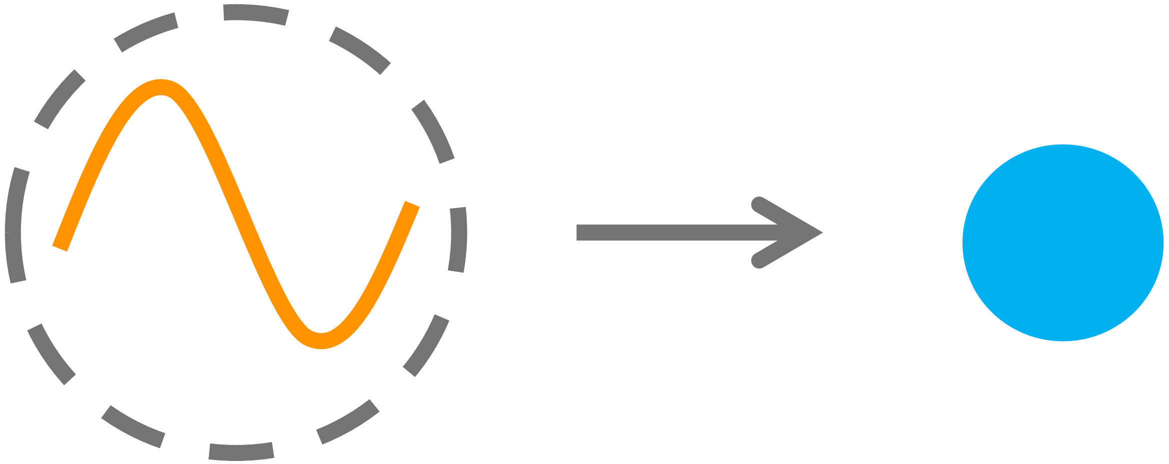
素粒子



相互作用を含めた全ての最小単位を

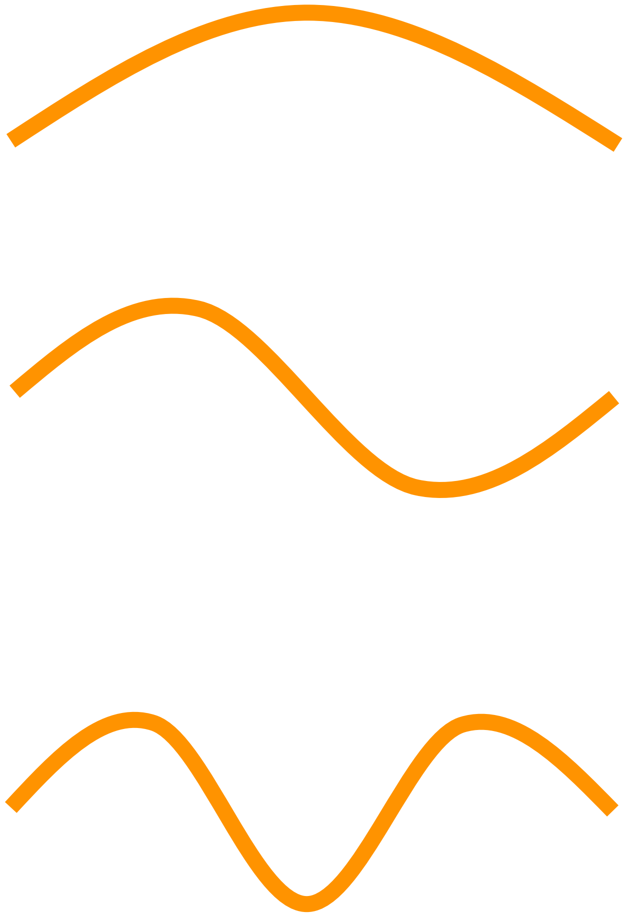
点ではなくひもだと考えるのが弦理論

弦理論の性質1



ひもは小さく、遠くから見ると点

弦理論の性質2

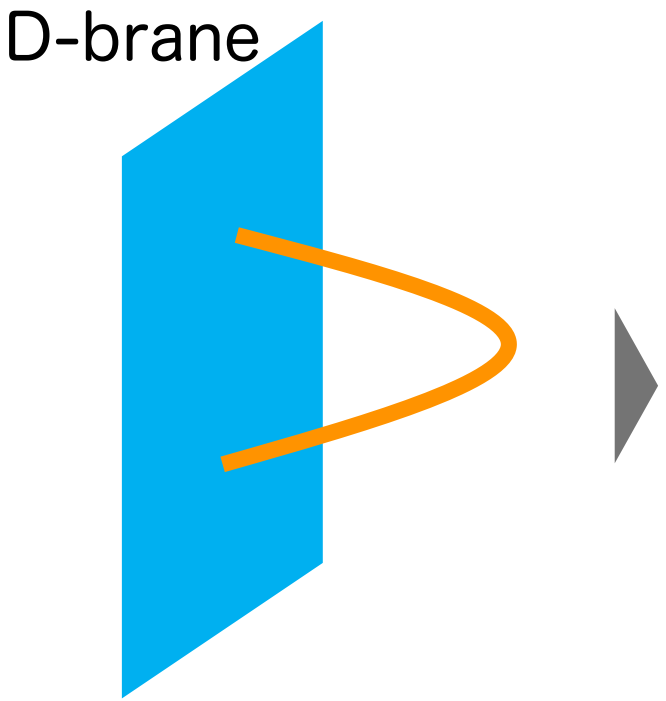


振動モードによって、
多様なエネルギー状態がある

$$E = mc^2$$

１つのひもで、
多様な粒子を定式化できる

弦理論の性質3



電磁気力
強い力
弱い力

重力

重力を含む全ての相互作用の素粒子が
1つのひもで記述できることがわかった

弦理論の性質4

素粒子を全て統一する究極理論··

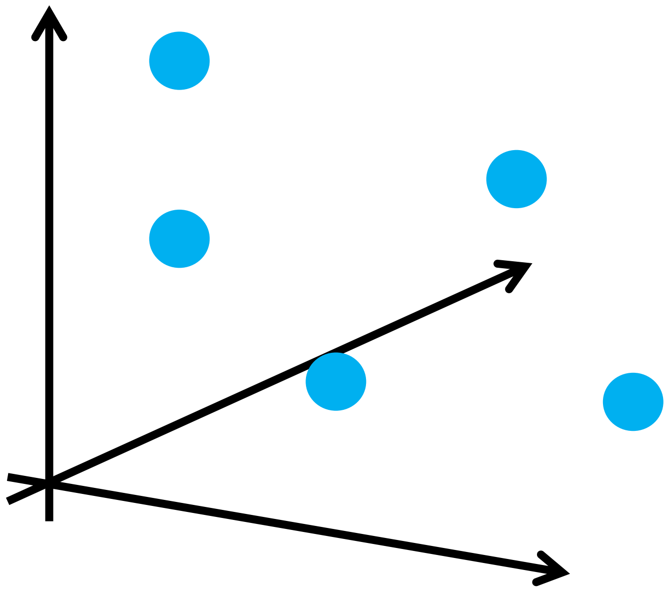
1. 重力
2. 電磁気力
3. 強い力
4. 弱い力

弦理論

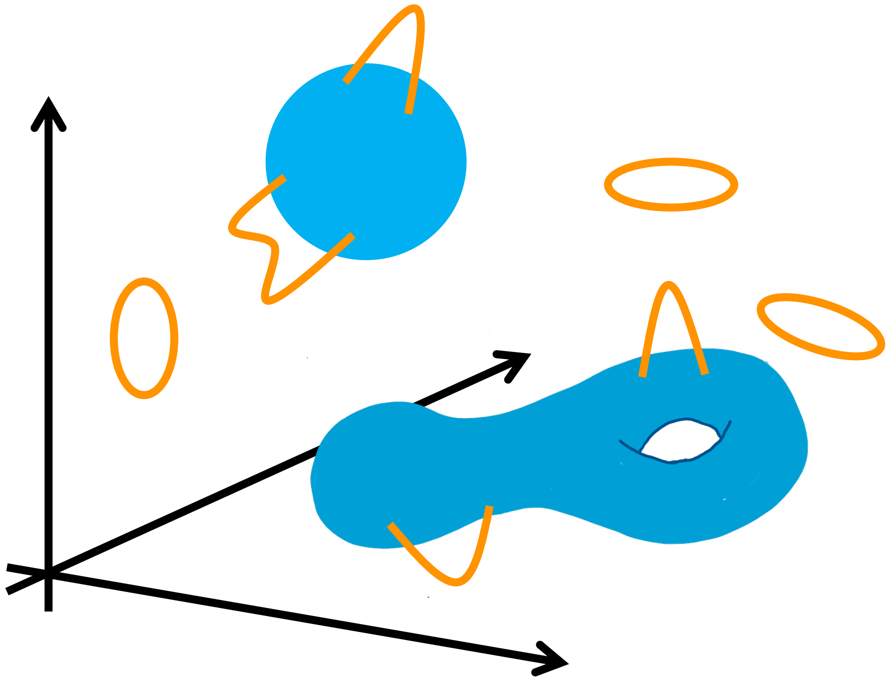
ひもを考えているので発散もない!!

弦理論の困難

点粒子だけを含む



ひもだけでなく
D-brane(ひもの端点)も含む



弦理論は様々な次元の**幾何学的な対象の多体系**

これまでのまとめ

- 重力
- 電磁気力
- 強い力
- 弱い力

弦理論

様々な次元の幾何学的な対象の多体系

非常に難しい

最終目標

弦理論を定式化して、4つの基本相互作用を統一!!

２. 弦理論の行列模型

行列模型 [BFSS][IKKT][BMN][DVV]

$$H = \mathrm{Tr}\left[\frac{g^2}{2}P_A^2 + \frac{1}{4g^2}[X_A, X_B]^2 + \mathrm{fermion}\right]$$

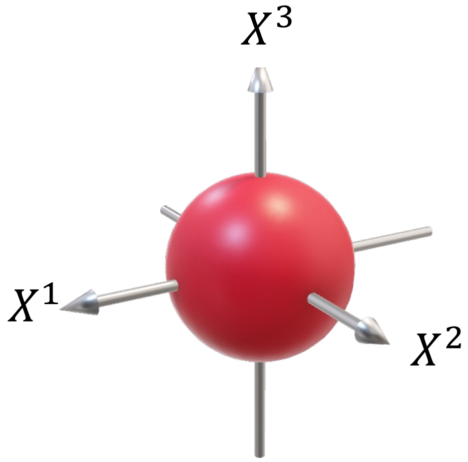
X_A, P_A : $N \times N$ matrix ($A = 1, \cdots, 9$)

- 力学変数が行列の量子力学
- 行列のサイズ $N \to \infty$ で弦理論を非摂動的に定式化

①. 埋め込み関数
②. 行列正則化
③. 行列での多体系の記述

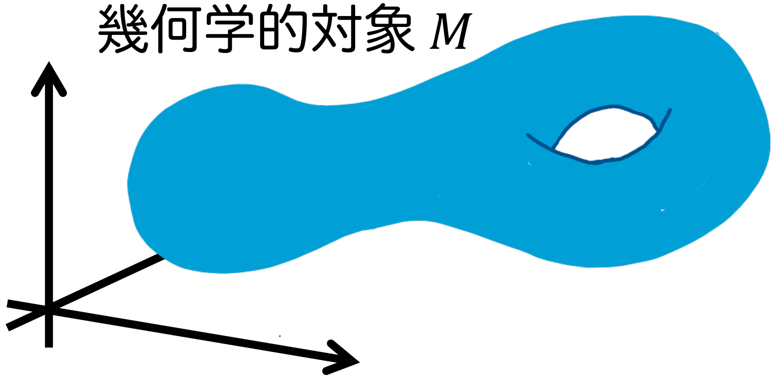
①. 埋め込み関数

例)



$$X : S^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} X^1 = \sin\theta\cos\phi = X^1(\theta,\phi) \\ X^2 = \sin\theta\sin\phi = X^2(\theta,\phi) \\ X^3 = \cos\theta = X^3(\theta,\phi) \end{cases}$$



$$X^A : M \to \mathbb{R}$$

(Aは時空の次元の数走る)

幾何学的対象の形は**埋め込み関数**で記述される

②. 行列正則化 [Hoppe][de Witt-Hoppe-Nicolai]

行列正則化は次を満たす線形写像 $T_N : C^\infty(M) \to M_N(\mathbb{C})$

(1). $\lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$

(2). $\lim_{N\to\infty} |iN[T_N(f), T_N(g)] - T_N(\{f,g\})| = 0 \quad \left(\{f,g\} = W^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g\right)$

(3). $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f \quad (\omega\text{: symplectic form})$

$$C^\infty(M) \underset{N\to\infty}{\overset{\text{行列正則化}}{\rightleftarrows}} M_N(\mathbb{C})$$

①、②のまとめ

埋め込み関数
$X^A : M \to \mathbb{R}$

$N \to \infty$

行列正則化
(有限次元近似)

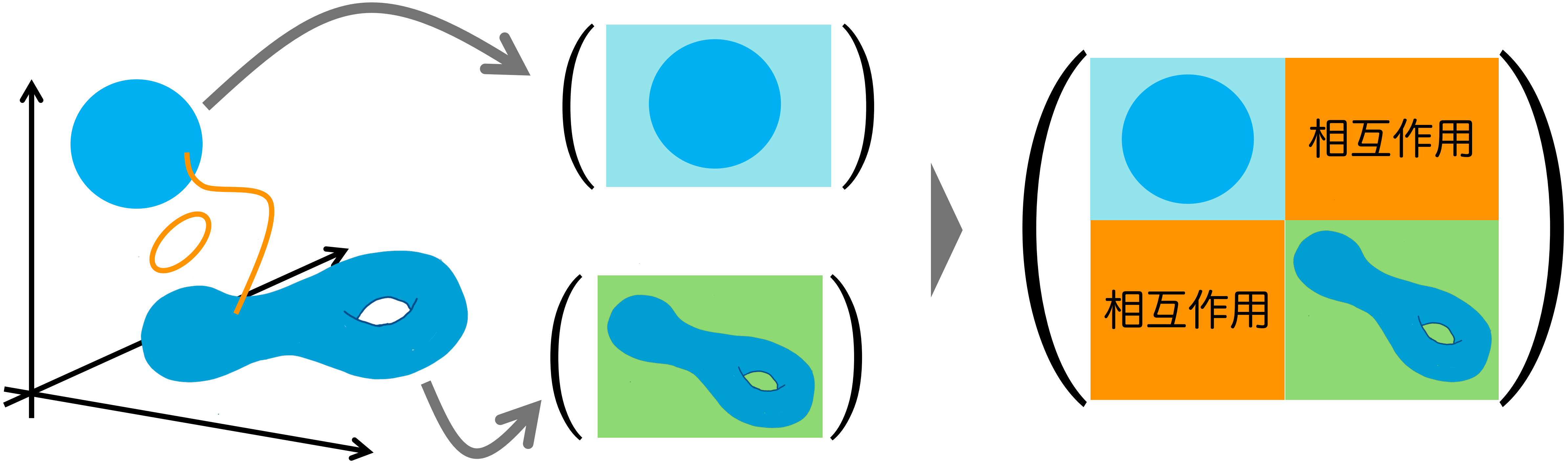
行列代数
$M_N(\mathbb{C})$

幾何学的対象の形 M

様々な次元の

幾何学的対象は行列によって近似できる

③. 行列での多体系の記述



行列を組み合わせることで
幾何学的な対象の多体系が記述できる

これまでのまとめ

弦理論：様々な次元の幾何学的な対象の多体系

形の情報

①、②により行列で近似できる

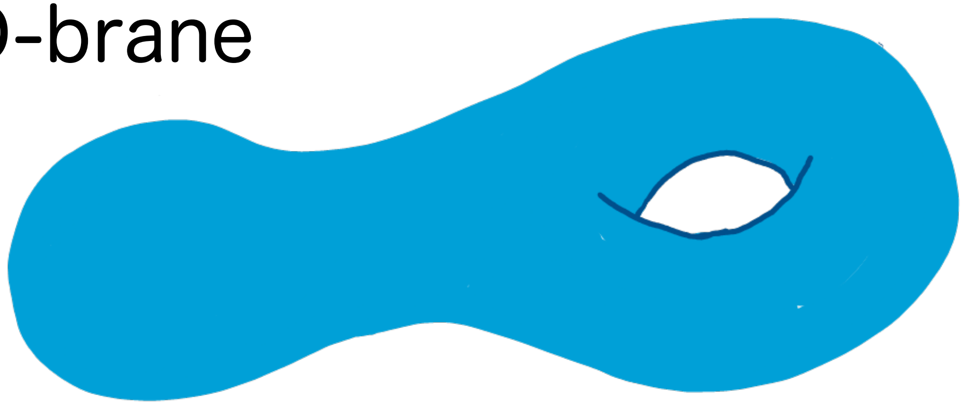
③により行列で多体系が記述できる

行列を力学変数にもつ行列模型により弦理論を記述

3. 行列による物質場・ゲージ場の記述

行列模型の課題

D-brane



- 物質場 → ベクトル束の構造
- ゲージ場 → 接続の構造
- 計量 → リーマン構造

従来の行列正則化では

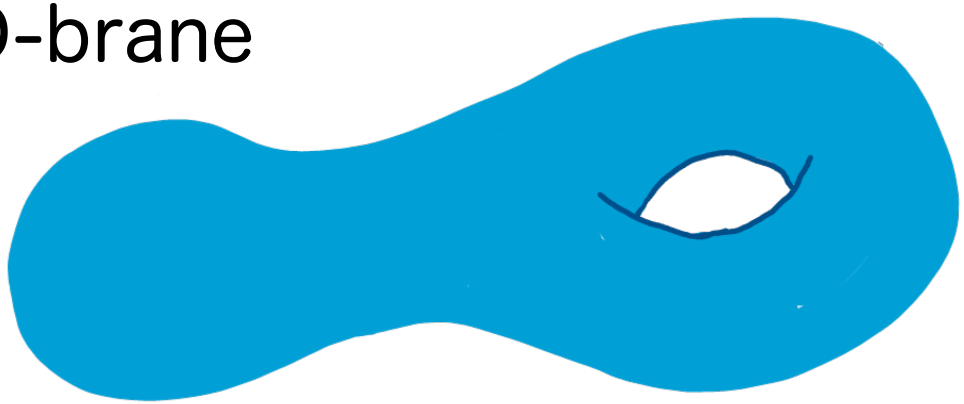
位置の情報のみを行列で記述している

行列正則化を一般化して

より多くの構造を行列で記述したい

自身の研究

D-brane



- 物質場 → ベクトル束の構造
- ゲージ場 → 接続の構造
- 計量 → リーマン構造

行列正則化を具体的に実行する手法

Berezin-Toeplitz量子化を用いて
行列正則化を一般化して物質場とゲージ場を行列で記述

行列正則化の一般化

形の情報＝関数 $\xrightarrow{\text{BT量子化}}$ 正方行列

自身の研究

物質場の情報＝ベクトル束の切断 $\xrightarrow{\text{BT量子化}}$ 長方行列

ゲージ場の情報＝ベクトル束の接続 $\xrightarrow{\text{BT量子化}}$ 行列の揺らぎ

4. Summary and discussion

Summary and discussion

- 4つの基本相互作用の統一理論の候補は弦理論
- 弦理論は様々な次元の幾何学的対象の多体系
- 様々な次元の幾何学的対象は(形の情報だけでなく)行列で近似できると考えられる
- 物質場・ゲージ場の情報を行列で記述した

Backup Slide

Berezin-Toeplitz量子化

Berezin-Toeplitz量子化 [Ma-Marinescu]

Berezin-Toeplitz量子化は行列正則化の一つの手法

1. 関数を線型写像とする

$$f = \int dxdy \; |x\rangle f_{xy} \langle y| \qquad \left(f_{xy} = f(x)\delta(x-y)\right)$$

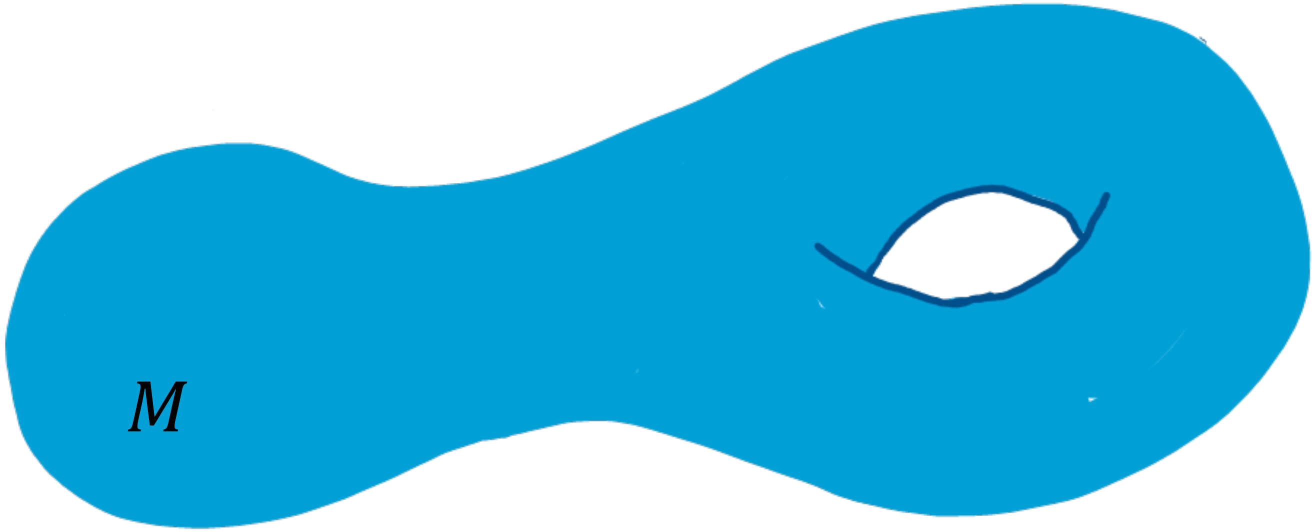
2. 有限次元に射影

有限個の点を選んで

$$\hat{f} = \sum_{x_i, y_i} |x_i\rangle f_{x_i y_j} \langle y_j|$$

setup

M : 2dim closed mfd (ω : symplectic form)



電荷Nのスピノル系

Flux : $F = dA \propto \omega$

1. 関数を線型写像とする

$$\text{spinor} \xrightarrow[\text{関数 } f]{} \text{spinor}$$

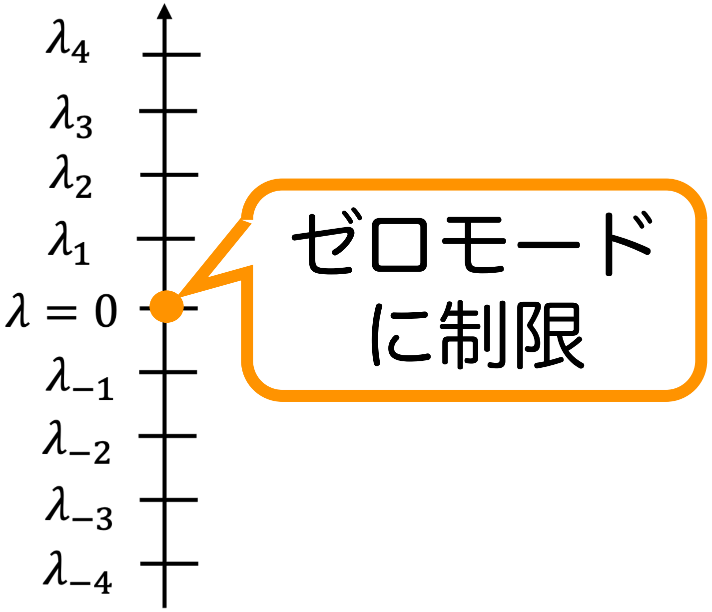
$$f = \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i\rangle f_{ij} \langle \psi_j| \qquad \left[\begin{array}{c} f_{ij} = \langle \psi_i | f \psi_j \rangle \\ f\psi(x) = f(x)\psi(x) \end{array} \right]$$

Dirac作用素の固有状態

$$D_0 = i\gamma^a(\partial_a + \Omega_a - iNA_a)$$

$$D_0|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle \qquad \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$$

2. 有限次元に射影する



$$D_0 \psi_I = 0$$

指数定理と消滅定理により

$$\psi_I \quad (I = 1,2,\cdots,N)$$

ゼロモードに射影→ $N \times N$行列

$$T(f) = \sum_{I=1}^{N} |\psi_I\rangle T(f)_{IJ} \langle \psi_J| \quad \left(T(f)_{IJ} = \langle \psi_I | f | \psi_J \rangle\right)$$

Berezin-Toeplitz量子化

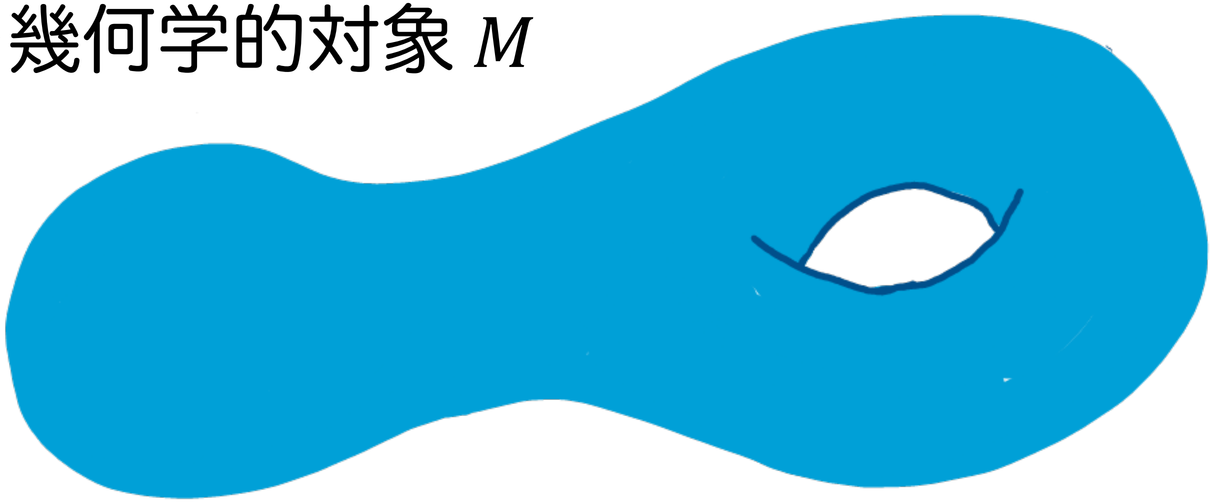
Π_0 : $\mathrm{Ker}D_0$への射影演算子

$$
\begin{tikzcd}
\text{spinor} \arrow[r, "\text{function } f"'] \arrow[d, "\Pi_0"] & \text{spinor} \arrow[d, "\Pi_0"] \\
\mathrm{Ker}D_0 \arrow[r, "T_N(f) = \Pi_0 f \Pi_0"'] & \mathrm{Ker}D_0
\end{tikzcd}
$$

$N \times N$行列が関数から得られた!!

①. 関数による幾何学の定式化

幾何学的対象 M



温度、明るさ、圧力…

観測量 ＝ M上の関数

等価 [Gelfand-Naimark]

幾何学的対象の形

行列模型

$$S = \frac{1}{g_{YM}^2} \int dt \ \mathrm{Tr} \left[\frac{1}{2} D_t X^A D_t X^A + \frac{1}{4} [X^A, X^B][X^A, X^B] + \mathrm{fermion} \right]$$

X^A : $N \times N$ matrix ($A = 1, \cdots, 9$)、 $D_t X^A = \partial_t X^A - i[A_t, X^A]$

- 力学変数が行列の量子力学
- 行列のサイズ $N \to \infty$ で弦理論を非摂動的に定式化

①. 埋め込み関数
②. 行列正則化
③. 行列での多体系の記述