Perturbative string theory and the matrix model

Yuhma Asano (Particle Theory group)
16 December 2024

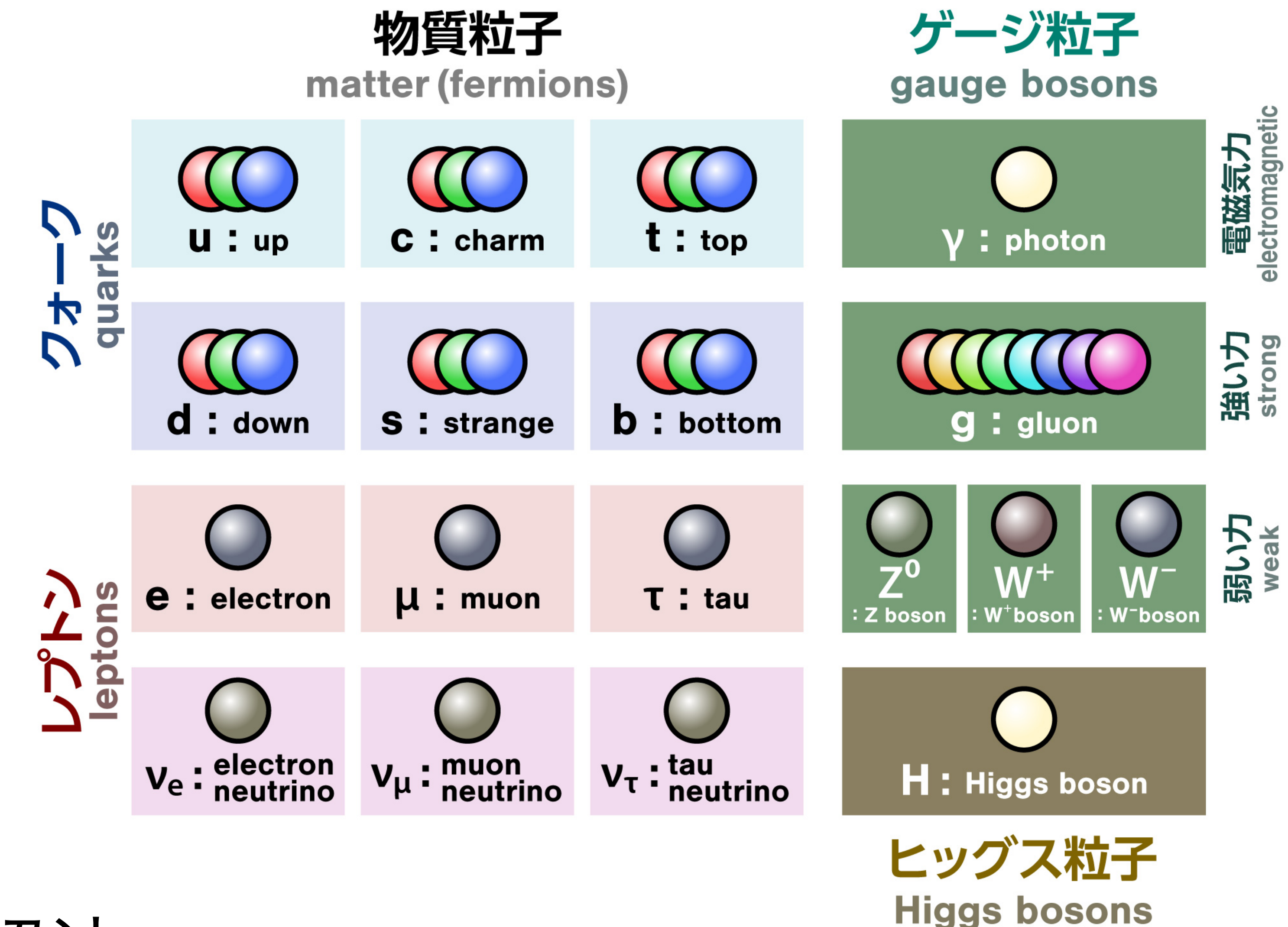
Based on JHEP10 (2024) 082 [arXiv: 2408.04000]

1. Introduction

素粒子標準模型と弦理論

- 素粒子の理論としては右図の粒子で記述される**標準模型**でほぼ完成

- しかし**重力**は、量子的に扱うのは非常に難しいため、標準模型に加えることが素朴にはできない



→ **超弦理論**により解決

自然界の基本的な**4つの力の統一**だけでなく

物質や時空までもが統一的に記述される

1. Introduction

超弦理論の問題点

- 摂動論に基づいた定式化でしか確立されていない

散乱振幅:

$$A_{j_1,\cdots,j_n}(k_1,\cdots,k_n) = \underline{\sum_{\chi=2,0,-2,\cdots} g_s^{-\chi}} \int DX\,Dg\,V_{j_1}(k_1)\cdots V_{j_n}(k_n)\ \exp[-S_{\mathrm{P}}^{(\mathrm{E})}]$$

弦結合g_sの摂動展開

→ 弦理論の非摂動的定式化

- 弦の場の理論
- 行列模型 $S_{\mathrm{MM}} = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}[X^\mu, X^\nu]^2 + \text{fermions}\right)$ ← 今日の話

$N \times N$ 行列

⋮

$$A^{(\mathrm{MM})}_{j_1,\cdots,j_n}(k_1,\cdots,k_n) = \int DX\,V_{j_1}(k_1)\cdots V_{j_n}(k_n)\ \exp\left[-S_{\mathrm{MM}}\right]$$

$$= \sum_{\chi=2,0,-2,\cdots} g_s^{-\chi} A_\chi(k_1,\cdots,k_n)$$

$$g_s \sim \frac{1}{N}$$

… 行列模型で非摂動的に定式化できそう！

1. Introduction

行列模型の問題点

0次元行列模型の散乱振幅:

$$A(k_1,\cdots,k_n)=\int DX\,V(k_1)\cdots V(k_n)\,\exp\left[-S_{\mathrm{MM}}\right]$$

$$S_{\mathrm{MM}}=\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}G_{\mu\mu'}G_{\nu\nu'}[X^\mu,X^\nu][X^{\mu'},X^{\nu'}]+\text{fermions}\right)\qquad(\mu=0,\cdots,9)$$

- $\exp[-S_{\mathrm{MM}}]$でいいのか？$\exp[iS_{\mathrm{MM}}]$ではないか？
- 平坦計量$G_{\mu\nu}$はEuclid型($G_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$)かMinkowski型($G_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$)か？

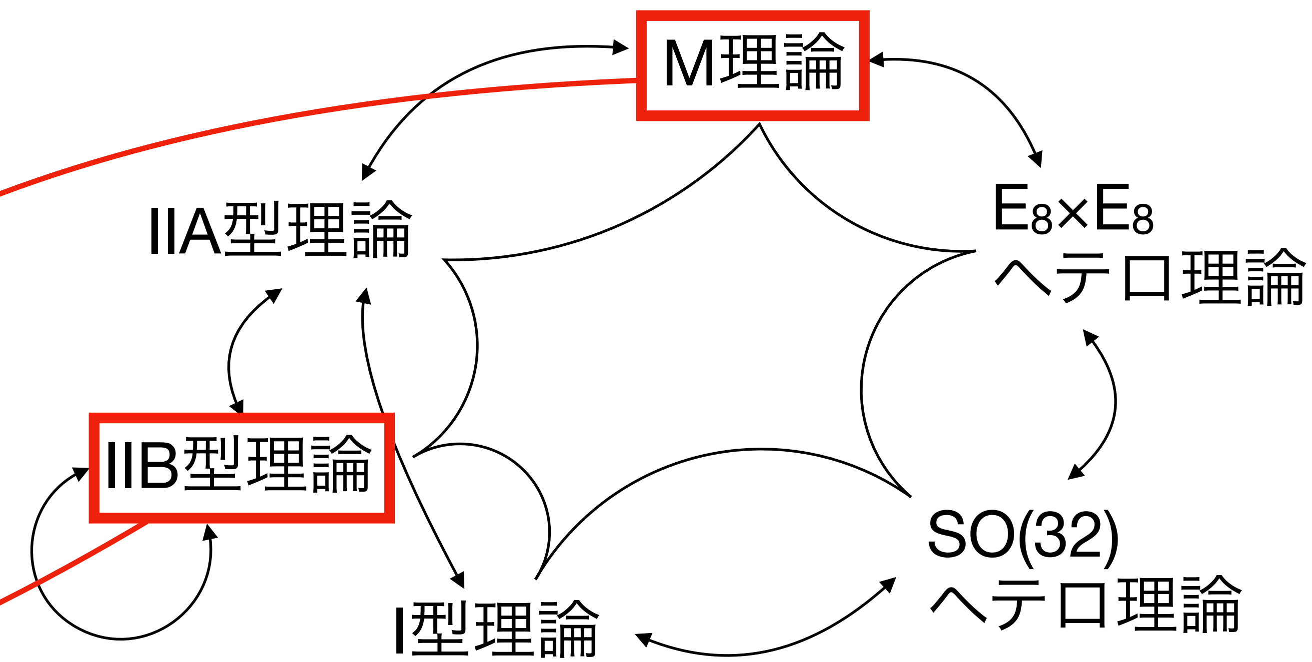
これらの問題に答えて

行列模型による定式化の完成を目指す

1. Introduction

超弦理論と行列模型の関係

- 超弦理論の摂動論は大まかに6種類ある
  - 双対性で互いに関係
  - それぞれに対応する
    行列模型が提唱されている



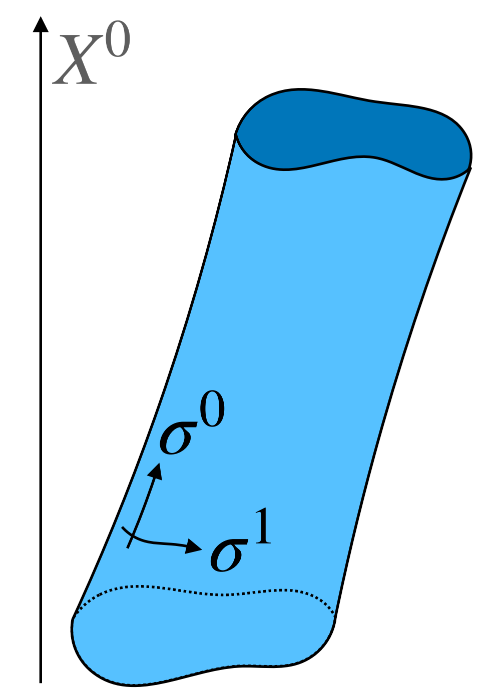
BFSS行列模型

IKKT行列模型

- 行列模型は摂動的超弦理論の正則化になっている

弦の位置座標 $X^\mu(\sigma)$ $\xmapsto{\text{行列正則化}}$ 行列 $(X^\mu)_{ij}$

摂動的弦理論に立ち戻って行列模型を見直す

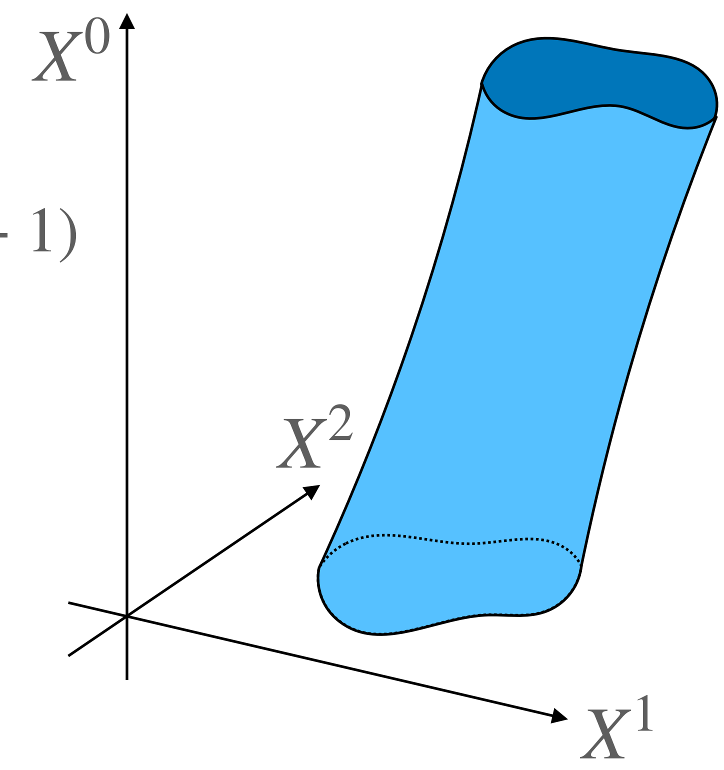


1. Introduction

摂動的弦理論の定義

出発点はMinkowski型Nambu-Goto作用

$$S_{\rm NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma^0 d\sigma^1 \underbrace{\sqrt{-\det \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu}}_{\text{世界面の面積}} \qquad \begin{array}{l}(\mu = 0,\cdots,D-1)\\ (a=0,1)\end{array}$$



散乱振幅の計算では、これと古典的に等価な

Polyakov作用をEuclid型にしたものを用いる:

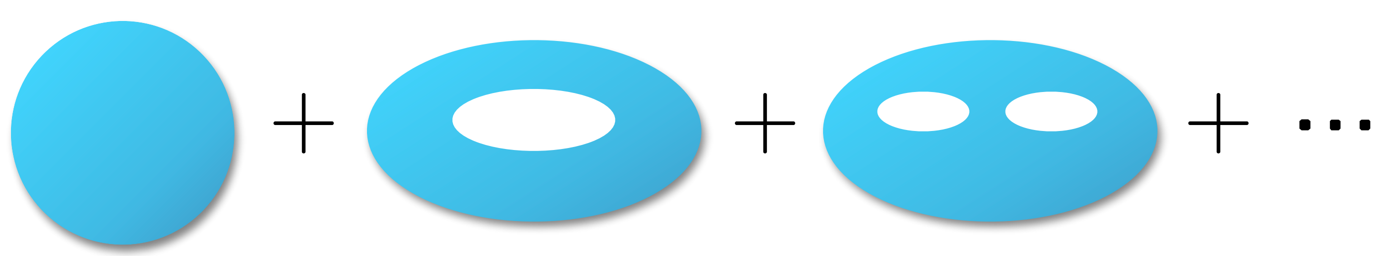
$$S_{\rm P}^{\rm (E)} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{\det g}\, g^{ab}\partial_a X_m \partial_b X^m \qquad \begin{array}{l}(m = 1,\cdots,D)\\ (a=1,2)\end{array}$$

散乱振幅

$$A_{j_1,\cdots,j_n}(k_1,\cdots,k_n) = \sum_{\chi=2,0,-2,\cdots} g_s^{-\chi}\int DX\,Dg\; V_{j_1}(k_1)\cdots V_{j_n}(k_n)\ \exp[-S_{\rm P}^{\rm (E)}]$$

[Polyakov '81]

=



1. Introduction

$$A_{j_1,\cdots,j_n}(k_1,\cdots,k_n) = \sum_{\chi=2,0,-2,\cdots} g_s^{-\chi} \int DX\, Dg\, V_{j_1}(k_1)\cdots V_{j_n}(k_n)\ \exp[-S_{\mathrm{P}}^{(\mathrm{E})}]$$

Questions:

- 元々Minkowski型だった。それと等価か？

- 元々Nambu-Goto作用で書かれてた。それと等価か？

- Minkowski型のNambu-Goto作用を用いると経路積分はどう定義するべきか？

$$\exp\left[-i\int d^2\sigma\sqrt{-\det h_{ab}}\right]$$

- 普通の場の量子論(QFT)と同じ性質になっているか？因果律は？

1. Introduction

弦理論における因果律

普通のQFTでは因果律は反粒子の存在によって実現されていた。

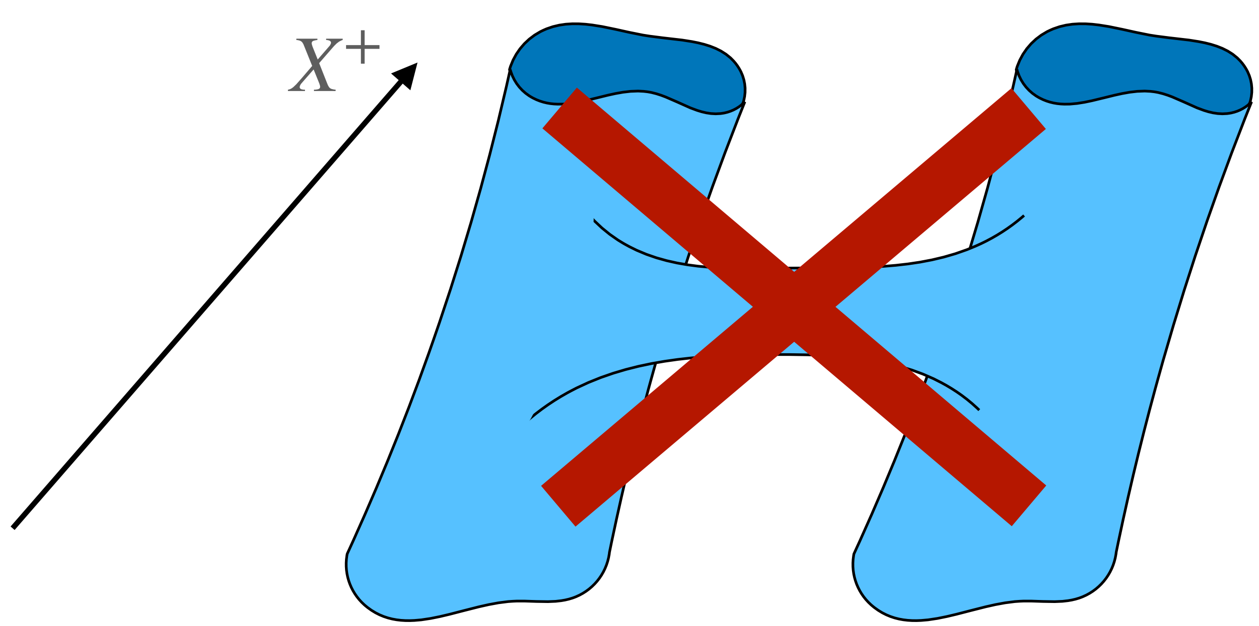
$$[\phi(x), \phi^\dagger(x')]_\mp = 0 \qquad \text{for space-like separation } (x-x')^2 > 0$$

摂動的弦理論では、

因果律を実現する明らかな方法がなさそうにみえる。 cf. [Witten '13]

素朴にはspace-likeな伝播が禁止されることが期待される。

i.e. 全ての点で $\det h_{ab} < 0$



1. Introduction

$$A_{j_1,\cdots,j_n}(k_1,\cdots,k_n) = \sum_{\chi=2,0,-2,\cdots} g_s^{-\chi} \int DX\, Dg\, V_{j_1}(k_1)\cdots V_{j_n}(k_n)\ \exp[-S_{\mathrm{P}}^{(\mathrm{E})}]$$

Questions:

- 元々Minkowski型だった。それと等価か？

➡ Yes!

- 元々Nambu-Goto作用で書かれてた。それと等価か？

➡ Yes!

- Minkowski型のNambu-Goto作用を用いると経路積分はどう定義するべきか？

$$\exp\left[-i\int d^2\sigma\sqrt{-\det h_{ab}}\right]$$

➡ $i\epsilon$項によりbranchが選ばれる

- 普通の場の量子論(QFT)と同じ性質になっているか？因果律は？

➡ $\det h_{ab} > 0$ が寄与しない

Table of contents

1. Introduction

2. Classical Equivalence

Nambu-Goto作用がPolyakov作用、Schild作用と古典的に等価

3. Quantum Equivalence

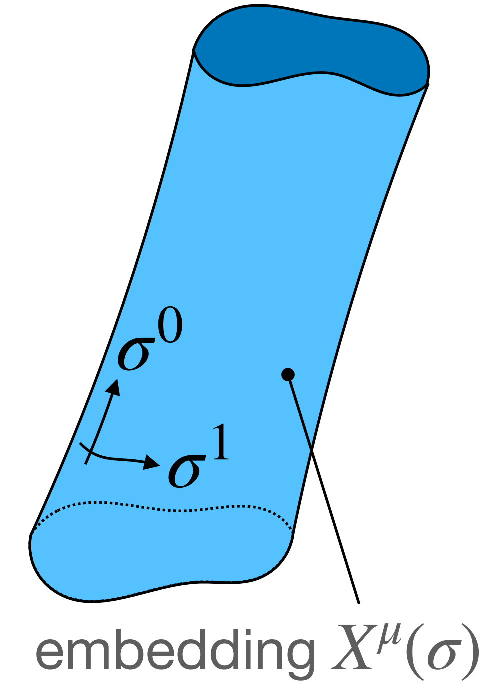
Euclid型Polyakov作用の摂動的弦理論が
Minkowski型Nambu-Goto作用のものと量子的に等価

4. “Derivation” of the Matrix model

Minkowski型の摂動的弦理論の正則化により行列模型を“導出”

5. Summary

2. Classical Equivalence



Nambu-Goto作用から出発して古典的等価性を確認

簡単のため、ボゾンのみの弦理論を考える。

$$S_{\mathrm{NG}} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \sqrt{-\det h} \qquad h_{ab} = \eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

この理論はパラメータ付替えの局所対称性 (diffeo.) があるので
それに対応する拘束条件 χ^0, χ^1 がある。

するとハミルトニアンは拘束条件を露わに入れた理論としてかけ、
計算すると、

$$\mathscr{H} = \Lambda_0 \chi^0 + \Lambda_1 \chi^1$$

$$\chi^0 = P^2 + \partial_1 X^2$$
$$\chi^1 = P_\mu \partial_1 X^\mu$$

これをもう一度Legendre変換してPolyakov作用を得る:

$$S_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{ab} h_{ab}$$

$$\sqrt{-g}\, g^{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Lambda_0} & \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \\ \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} & \frac{-\Lambda_1^2 + \Lambda_0^2}{\Lambda_0} \end{pmatrix}$$

2. Classical Equivalence

$$S_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \frac{1}{2}\underline{\sqrt{-g}\,g^{ab}h_{ab}}$$

$$= -\frac{h_{11}}{\Lambda_0}\left(\Lambda_1 - \frac{h_{01}}{h_{11}}\right)^2 - \frac{h_{00}h_{11} - h_{01}^2}{\Lambda_0 h_{11}} + \Lambda_0 h_{11}$$

$$\sqrt{-g}\,g^{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Lambda_0} & \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \\ \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} & \frac{-\Lambda_1^2 + \Lambda_0^2}{\Lambda_0} \end{pmatrix}$$

Λ_1について運動方程式を解いて消すことでSchild作用を得る

$$S_{\mathrm{Schild}} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \frac{1}{2}\left(\frac{-\det h}{e_g} + e_g\right)$$

$$e_g = \Lambda_0 h_{11}$$

※ e_gについて運動方程式を解いて消すとNambu-Goto作用に戻ってくる

これでNambu-Goto, Schild, Polyakovの3種類の作用が
古典的に等価であることが分かった。

3. Quantum Equivalence

Overview of the equivalences

Polyakov作用のEuclidean path int. $\int DX\,Dg\,\exp[-S_{\mathrm{P}}^{(\mathrm{E})}]$

$\Updownarrow$

Schild作用のEuclidean path int.

$\Updownarrow$

Schild作用のMinkowskian path int.

$\Updownarrow$

Nambu-Goto作用のMinkowskian path int.

平坦ターゲット空間上のcritical type IIB and IIA superstringとcritical bosonic string について量子的に等価

3. Quantum Equivalence

Path integral—Euclidean to Minkowskian

Polyakov作用のEuclidean path integralから始めて式変形していく

$$Z = \int DX\, Dg\, \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab} h_{ab}\right]$$

Euclidean Polyakov-type

$$\boxed{Dg = D\phi \prod_{\sigma} \frac{2e^{\phi}\, d\Lambda_1 d\Lambda_2}{(\Lambda_2)^2}}$$

⋯ critical stringならϕの積分は自明

$$= \int DX\, Dg\, \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left\{ \underline{\frac{h_{11}}{\Lambda_2}\left(\Lambda_1 - \frac{h_{12}}{h_{11}}\right)^2} + \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{\Lambda_2 h_{11}} + \Lambda_2 h_{11} \right\}\right]$$

$$= \int DX \left[\prod_{\sigma} \int_0^{\infty} \frac{2de_g^{(\mathrm{E})}}{e_g^{(\mathrm{E})\,3/2}}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left\{ \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{e_g^{(\mathrm{E})}} + e_g^{(\mathrm{E})} \right\}\right]$$

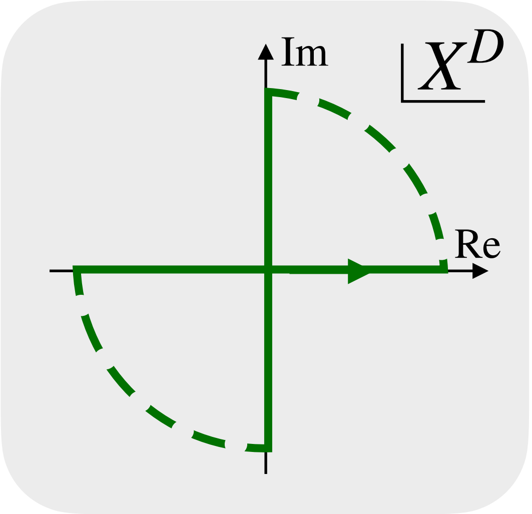
Euclidean Schild-type

$$\boxed{\Lambda_2 h_{11} =: e_g^{(\mathrm{E})}}$$

3. Quantum Equivalence

Cauchyの積分定理でMinkowski型と等価であることが示せる:

$$X^D = e^{i\theta}X^0, \quad e_g^{(\mathrm{E})} = e^{i\theta}e_g, \quad \sigma^2 \to \sigma^0 \quad (e_g > 0 \text{ なら } \theta \to \tfrac{\pi}{2})$$



$$Z = \int DX \left[\prod_\sigma \int_0^\infty \frac{2de_g^{(\mathrm{E})}}{e_g^{(\mathrm{E})\,3/2}}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left\{\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{e_g^{(\mathrm{E})}} + e_g^{(\mathrm{E})}\right\}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left\{\frac{e^{-i\theta}(\varepsilon^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^j)^2 + 2e^{i\theta}(\varepsilon^{ab}\partial_a X^0 \partial_b X^i)^2}{2e_g} + e^{i\theta}e_g\right\}$$

$$\overset{\theta=\pi/2}{=} -\frac{i}{2}\int d^2\sigma \left\{\frac{-(\varepsilon^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^j)^2 + 2(\varepsilon^{ab}\partial_a X^0 \partial_b X^i)^2}{2e_g} + e_g\right\}$$

$$= \int DX \left[\prod_\sigma \int_{-\infty}^\infty \frac{-de_g}{(ie_g)^{3/2}}\right] \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^2\sigma \left\{\frac{-(h_{00}h_{11}-h_{01}^2)}{e_g} + e_g - i\epsilon|e_g| - i\frac{\tilde{\epsilon}}{|e_g|}\right\}\right]$$

Minkowskian Schild-type

3. Quantum Equivalence

$$Z = \int DX \left[\prod_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-de_g}{(ie_g)^{3/2}} \right] \exp\left[-\frac{i}{2} \int d^2\sigma \left\{ \frac{-\det h}{e_g} + e_g - i\epsilon |e_g| - i \frac{\tilde{\epsilon}}{|e_g|} \right\} \right]$$

$$= \int DX \prod_\sigma \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\det h - i\epsilon}} e^{-i\Delta\Sigma\sqrt{-\det h - i\epsilon}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\det h + i\epsilon}} e^{i\Delta\Sigma\sqrt{-\det h + i\epsilon}} \right)}_{\text{cancel if } \det h > 0}$$

$$= \int DX \left[\prod_\sigma \sum_{s(\sigma)=\pm 1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\det h - i\epsilon s}} \right] \exp\left[-i \int d^2\sigma\, s\sqrt{-\det h - i\epsilon s} \right] \begin{cases} s = 1: \text{基本弦} \\ s = -1: \text{反基本弦} \end{cases}$$

Minkowskian Nambu-Goto-type

Euclid型のPolyakov作用は、Minkowski型のSchildとNambu-Goto作用と量子的に等価であることが言えた。

また、反基本弦の存在により因果律が実現

[Y.A. ’24]

4. “Derivation” of the Matrix model

さて、Minkowski型Schild作用に行列正則化を適用する。

超弦の場合の作用:

$$S_{\mathrm{Schild}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\left[\frac{1}{4e_g}\{X^\mu, X^\nu\}^2_{\hat{\mathrm{P}}} + 2i\psi^T\Gamma_\mu\{X^\mu,\psi\}_{\hat{\mathrm{P}}} - \frac{e_g}{2}\right]$$

det h

[Ishibashi, Kawai, Kitazawa, Tsuchiya ’96]

Poisson bracket $\{f,g\}_{\hat{\mathrm{P}}} := \varepsilon^{ab}\partial_a f \partial_b g$

行列正則化の処方: $X^\mu(\sigma) \mapsto X^\mu_{ij}, \quad e_g(\sigma) \mapsto -Y_{ij}$

$$\{\,\cdot\,,\cdot\,\}_{\hat{\mathrm{P}}} \mapsto \frac{N}{i}[\,\cdot\,,\cdot\,], \qquad \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma \mapsto \frac{1}{N}\mathrm{tr}$$

$$\int DX\, De_g\, \exp[iS_{\mathrm{Schild}}] \xrightarrow{\text{行列正則化}} \int DX\, DY\, \exp[iS_{\mathrm{NBI}}]$$

$$S_{\mathrm{NBI}} = N\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}Y^{-1}[X^\mu, X^\nu]^2 + \frac{1}{2}\psi^T\Gamma_\mu[X^\mu,\psi] + Y + \frac{i}{N}(N+\tfrac{1}{2})\ln(-iY)\right)$$

cf. [Fayyazuddin, Makeenko, Olesen, Smith, Zarembo ’96]

因果律の性質を露わに持つ行列模型が得られた。 [Y.A. ’24]

5. Summary

- 超弦理論は量子重力を無矛盾に実現するが、非摂動的に定式化されていないという問題がある。非摂動的定式化の候補として行列模型が研究されている。
- 行列模型の経路積分の定義を理解するために摂動的弦理論を見直した。
- critical bosonic stringとcritical type II superstringの摂動的弦理論に対して、Euclid型Polyakov作用の理論はMinkowski型のPolyakov作用、Schild作用、Nambu-Goto作用の理論と量子的に等価
- 世界面の経路積分をフルに考慮することで因果律が導かれた。
- 摂動的弦理論で実現された因果律を保つMinkowski型行列模型が導けた。行列模型の経路積分をどのように定義するべきかという重要な問いに対して部分的に答えを与えることができた。